

## 第1章 | 数 列



## 第1節 等差数列と等比数列

## 1 数列と一般項

まとめ

## 1 数列

数を一列に並べたものを **数列** といい、数列における各数を **項** という。数列の項は、最初の項から順に第1項、第2項、第3項、……といい、 $n$  番目の項を **第  $n$  項** という。とくに、第1項を **初項** ともいう。

**注意** 項の個数が有限である数列を **有限数列**、項が限りなく続く数列を **無限数列** ということがある。

## 2 数列の表し方

数列を一般的に表すには、右のように書く。 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$   
この数列を  $\{a_n\}$  と略記することもある。

## 3 数列の一般項

数列  $\{a_n\}$  の第  $n$  項  $a_n$  が  $n$  の式で表されるとき、 $n$  に 1, 2, 3, ……を順に代入すると、数列  $\{a_n\}$  の初項、第2項、第3項、……が得られる。

このような  $a_n$  を数列  $\{a_n\}$  の **一般項** という。

## A 数列の表記

教 p.8

練習  
1

教科書の数列① 1, 4, 9, 16, ……の第2項と第4項をいえ。  
また、第5項を求めよ。

**指針** **数列の項** 自然数 1, 2, 3, 4, ……を図のように正  
方形状に並べていく。このとき、上端に並ぶ数を左  
から順に取り出すと  
1, 4, 9, 16, 25, ……  
である。

|    |    |     |     |     |
|----|----|-----|-----|-----|
| 1  | 4  | 9   | 16  | 25  |
| 2  | 3  | 8   | 15  | 24  |
| 5  | 6  | 7   | 14  | 23  |
| 10 | 11 | 12  | 13  | 22  |
| 17 | 18 | 19  | 20  | 21  |
| 26 | 27 | ... | ... | ... |

**解答** 数列 1, 4, 9, 16, ……  
の第2項は4, 第4項は16 ㊟  
また、教科書の図の23の上は、下から順に24, 25となる。  
よって、第5項は25 ㊟

**別解**  $1=1^2$ ,  $4=2^2$ ,  $9=3^2$ ,  $16=4^2$  であるから, この数列は

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$$

と考えられる。したがって, 第5項は  $5^2=25$  答

練習  
2

教 p.9

一般項が次の式で表される数列  $\{a_n\}$  について, 初項から第4項までを求めよ。

$$(1) a_n = 2n - 1 \quad (2) a_n = n(n+1) \quad (3) a_n = 2^n$$

**指針** 数列の一般項と項 一般項  $a_n$  の式に  $n=1, 2, 3, 4$  を順に代入する。

**解答** (1)  $a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ ,  $a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ,  $a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ ,

$$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7 \quad \text{答}$$

(2)  $a_1 = 1 \cdot (1+1) = 2$ ,  $a_2 = 2(2+1) = 6$ ,  $a_3 = 3(3+1) = 12$ ,

$$a_4 = 4(4+1) = 20 \quad \text{答}$$

(3)  $a_1 = 2^1 = 2$ ,  $a_2 = 2^2 = 4$ ,  $a_3 = 2^3 = 8$ ,

$$a_4 = 2^4 = 16 \quad \text{答}$$

## B 数列の一般項を $n$ の式で表す

教 p.9

練習  
3

次のような数列の一般項  $a_n$  を,  $n$  の式で表せ。

(1) 偶数  $2, 4, 6, 8, \dots$  の数列で符号を交互に変えた数列  
 $-2, 4, -6, 8, \dots$

(2) 分子には奇数, 分母には2の累乗が順に現れる分数の数列

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \dots$$

**指針** 数列の一般項 1つの数列の中に2つの異なる規則性がある場合, それぞれを別々に考えてから, それらを組み合わせる。

**解答** (1) 偶数  $2, 4, 6, 8, \dots$  の数列に着目すると

$$2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, \dots$$

であるから, この数列の第  $n$  項は

$$2n \quad \dots \quad \text{①}$$

また, 符号に着目し,  $-1$  と  $1$  が交互に並ぶ数列を考えると,

$$\text{この数列の第 } n \text{ 項は } (-1)^n \quad \dots \quad \text{②}$$

①, ②から, 求める数列の一般項は

$$a_n = (-1)^n \cdot 2n \quad \text{答}$$

(2) 分子に着目すると, 奇数の数列

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

であり

$$2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 4 - 1, \dots$$

であるから、この数列の第  $n$  項は  $2n - 1 \dots \dots$  ①

また、分母に着目すると、2 の累乗の数列

$$2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$$

であり、この数列の第  $n$  項は  $2^n \dots \dots$  ②

①, ②から、求める数列の一般項は

$$a_n = \frac{2n-1}{2^n} \quad \text{答}$$

教 p.9

深める

教科書 8 ページの自然数を正形状に並べた図において、自分で  
定めた規則にしたがって数を取り出し数列を作ってみよう。

|    |                          |    |    |    |    |    |
|----|--------------------------|----|----|----|----|----|
| 解答 | (例 1) 左端に並ぶ数を上から順に取り出すと  | 1  | 4  | 9  | 16 | 25 |
|    | 1, 2, 5, 10, 17, $\dots$ | 2  | 3  | 8  | 15 | 24 |
|    | (例 2) 1 から始めて右下に斜めに並ぶ数を順 | 5  | 6  | 7  | 14 | 23 |
|    | に取り出すと                   | 10 | 11 | 12 | 13 | 22 |
|    | 1, 3, 7, 13, 21, $\dots$ | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |

参考 上端の左から  $n$  列目に並ぶ数は  $n^2$  で表される。これをもとに考えると、例 1 の数列の第  $n$  項は上端の  $(n-1)$  列目の数  $(n-1)^2$  に 1 を足したものが並んでいることから、一般項が  $(n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$  となる数列である (初項の 1 については、 $1^2 - 2 \cdot 1 + 2 = 1$  と考える)。

また、例 2 の数列の第  $n$  項は上端の左から  $n$  列目の数  $n^2$  より  $n-1$  小さい数が並んでいることから、一般項が  $n^2 - (n-1) = n^2 - n + 1$  となる数列である。

## 2 等差数列

まとめ

## 1 等差数列

初項に一定の数  $d$  を次々と足して得られる数列を 等差数列 といい、その一定の数  $d$  を 公差 という。

例 初項 1, 公差 2 の等差数列

$$1, 3, 5, 7, \dots$$

+2   +2   +2

初項 4, 公差  $-2$  の等差数列

$$4, 2, 0, -2, \dots$$

-2   -2   -2

## 2 等差数列の一般項

初項  $a$ , 公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

← 等差数列の一般項は  $n$  の 1 次式

## 3 等差数列の性質

等差数列は、隣り合う 2 項の差が常に一定である。等差数列  $\{a_n\}$  について、すべての自然数  $n$  で、次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = a_n + d \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} - a_n = d$$

## 4 等差数列をなす 3 数

数列  $a, b, c$  が等差数列  $\iff 2b = a + c$  ( $b$  を 等差中項 という。)

## A 等差数列

教 p.10

練習  
4

次のような等差数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1, 公差 5

(2) 初項 10, 公差  $-4$

指針 等差数列の項 前の項に公差  $d$  を足して、次の項を求める。

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

+d   +d   +d

解答 等差数列を  $\{a_n\}$ , 公差を  $d$  とする。

$$(1) \quad a_2 = a_1 + d = 1 + 5 = 6$$

←  $a_1$  は初項

$$a_3 = a_2 + d = 6 + 5 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 5 = 16$$

答 1, 6, 11, 16

$$(2) \quad a_2 = a_1 + d = 10 + (-4) = 6$$

$$a_3 = a_2 + d = 6 + (-4) = 2$$

$$a_4 = a_3 + d = 2 + (-4) = -2$$

答 10, 6, 2, -2

練習  
5

教 p.10

次の等差数列の公差を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

- (1) 1, 5, 9, □, □, …… (2) □, 5, 2, □, □, ……

指針 等差数列の決定 等差数列であるから、隣り合う2つの項に着目して、  
(前の項)+(公差)=(後の項)により、公差を求める。

解答 等差数列を  $\{a_n\}$ 、公差を  $d$  とする。

$$(1) \quad 1 + d = 5 \text{ より } d = 5 - 1 = 4$$

$$\leftarrow a_1 + d = a_2$$

$$\text{第4項 } a_4 \text{ は } a_4 = 9 + 4 = 13$$

$$\leftarrow a_4 = a_3 + d$$

$$\text{第5項 } a_5 \text{ は } a_5 = 13 + 4 = 17$$

$$\leftarrow a_5 = a_4 + d$$

答 公差 4, □は順に 13, 17

$$(2) \quad 5 + d = 2 \text{ より } d = 2 - 5 = -3$$

$$\leftarrow a_2 + d = a_3$$

$$\text{初項 } a_1 \text{ は } a_1 + (-3) = 5 \text{ より } a_1 = 8$$

$$\leftarrow a_1 + d = a_2$$

$$\text{第4項 } a_4 \text{ は } a_4 = 2 + (-3) = -1$$

$$\leftarrow a_4 = a_3 + d$$

$$\text{第5項 } a_5 \text{ は } a_5 = -1 + (-3) = -4$$

$$\leftarrow a_5 = a_4 + d$$

答 公差 -3, □は順に 8, -1, -4

B 等差数列の一般項

教 p.11

練習  
6

次のような等差数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。また、第10項を求めよ。

- (1) 初項 5, 公差 4 (2) 初項 10, 公差 -5

指針 等差数列の一般項 初項  $a$ , 公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項の公式  
 $a_n = a + (n-1)d$  にあてはめる。また、第10項は、得られた  $n$  の1次式に  $n=10$   
を代入すると求められる。

解答 (1) 一般項は  $a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$  すなわち  $a_n = 4n + 1$  答

$$\text{第10項は } a_{10} = 4 \cdot 10 + 1 = 41 \text{ 答}$$

(2) 一般項は  $a_n = 10 + (n-1) \cdot (-5)$  すなわち  $a_n = -5n + 15$  答

$$\text{第10項は } a_{10} = -5 \cdot 10 + 15 = -35 \text{ 答}$$

練習  
7

教 p.11

次のような等差数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

- (1) 第4項が15, 第8項が27 (2) 第5項が20, 第10項が0

指針 等差数列の一般項 初項を  $a$ , 公差を  $d$  として一般項の式を作り、与えられ

た値を代入して  $a$  と  $d$  についての連立方程式を立てる。

解答 初項を  $a$ 、公差を  $d$  とすると  $a_n = a + (n-1)d$

(1) 第4項が15であるから  $a + 3d = 15$  …… ①

第8項が27であるから  $a + 7d = 27$  …… ②

①, ②を解くと  $a = 6, d = 3$

よって、一般項は  $a_n = 6 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 3$

すなわち  $a_n = 3n + 3$  答

(2) 第5項が20であるから  $a + 4d = 20$  …… ①

第10項が0であるから  $a + 9d = 0$  …… ②

①, ②を解くと  $a = 36, d = -4$

よって、一般項は  $a_n = 36 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 40$

すなわち  $a_n = -4n + 40$  答

## C 等差数列の性質

教 p.12

練習  
8

一般項が  $a_n = 2n + 5$  で表される数列  $\{a_n\}$  は等差数列であることを示せ。また、初項と公差を求めよ。

指針 等差数列の性質  $a_{n+1} - a_n = d$  (一定) となれば、数列  $\{a_n\}$  は等差数列である。  
初項は  $a_1$ 、公差は  $d$  である。

解答  $a_n = 2n + 5$  であるから

$$a_{n+1} - a_n = \{2(n+1) + 5\} - (2n + 5) = 2$$

隣り合う2項の差が2で一定であるから、

数列  $\{a_n\}$  は公差2の等差数列である。 終

よって、初項は  $a_1 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$ 、公差は2 答

教 p.12

練習  
9

次の数列が等差数列であるとき、 $x$  の値を求めよ。

(1)  $3, x, 11, \dots$  (2)  $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}, \dots$

指針 等差数列をなす3数 数列  $a, b, c$  が等差数列をなすとき、 $2b = a + c$  が成り立つ。

解答 (1) 数列  $3, x, 11$  は等差数列であるから  $2x = 3 + 11$

よって  $2x = 14$  したがって  $x = 7$  答

(2) 数列  $\frac{1}{12}, \frac{1}{x}, \frac{1}{6}$  は等差数列であるから

$$2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \quad \text{よって} \quad \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

両辺に  $4x$  を掛けると  $8 = x$  すなわち  $x = 8$  答

わざわざ公差  
を求める必要  
はないよ。



### 3 等差数列の和

まとめ

#### 1 等差数列の和

等差数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。

$$\text{① 初項 } a, \text{ 第 } n \text{ 項 } l \text{ のとき } S_n = \frac{1}{2} n(a+l)$$

$$\text{② 初項 } a, \text{ 公差 } d \text{ のとき } S_n = \frac{1}{2} n\{2a + (n-1)d\}$$

項の個数が有限である数列では、その項の個数を **項数** といい、最後の項を **末項** という。上の公式①は、初項  $a$ 、末項  $l$ 、項数  $n$  の等差数列の和を表している。

#### 2 自然数の和、奇数の和

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

← 初項 1, 末項  $n$ , 項数  $n$

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

← 初項 1, 末項  $2n-1$ , 項数  $n$

### A 等差数列の和の公式

教 p.14

練習  
10

次の和  $S$  を求めよ。

(1) 初項 2, 末項 10, 項数 9 の等差数列の和

(2) 初項 10, 公差  $-4$  の等差数列の初項から第 15 項までの和

#### 指針 等差数列の和

(1) 初項  $a$ , 末項  $l$ , 項数  $n$  の等差数列の和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{1}{2} n(a+l)$$

←  $\frac{1}{2} \times \text{項数} \times (\text{初項} + \text{末項})$

(2) 初項  $a$ , 公差  $d$  の等差数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{1}{2} n\{2a + (n-1)d\}$$

解答 (1)  $S = \frac{1}{2} \cdot 9(2+10) = 54$  答

(2)  $S = \frac{1}{2} \cdot 15\{2 \cdot 10 + (15-1) \cdot (-4)\} = -270$  答

教 p.14

練習  
11

初項 1, 公差 2 の等差数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ。

指針 等差数列の和 初項  $a$ 、公差  $d$  の等差数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$$

解答  $S_n = \frac{1}{2}n\{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2\}$

$$= \frac{1}{2}n \cdot 2n$$

$$= n^2 \quad \text{答}$$

練習  
12

教 p.14

次の等差数列の和  $S$  を求めよ。

- (1) 2, 6, 10, …… , 74                      (2) 102, 96, 90, …… , 6

指針 等差数列の和 初項と末項はわかっているため、項数を求めれば等差数列の和の公式を使うことができる。

解答 (1) この等差数列の初項は 2

公差は初項, 第 2 項より  $6-2=4$

項数を  $n$  とすると,  $2+(n-1) \cdot 4=74$  より  $n=19$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot 19(2+74) = 722 \quad \text{答}$$

(2) この等差数列の初項は 102

公差は初項, 第 2 項より  $96-102=-6$

項数を  $n$  とすると,  $102+(n-1) \cdot (-6)=6$  より  $n=17$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} \cdot 17(102+6) = 918 \quad \text{答}$$

## B 自然数の和, 奇数の和

教 p.15

練習  
13

次の和を求めよ。

(1) 1 から 100 までのすべての自然数の和  $1+2+3+\cdots+100$

(2) 1 から 55 までのすべての奇数の和  $1+3+5+\cdots+55$

指針 自然数の和, 奇数の和

$$\text{自然数の和 } 1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\text{奇数の和 } 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

解答 (1)  $1+2+3+\cdots+100 = \frac{1}{2} \cdot 100(100+1) = 5050 \quad \text{答}$

$$\begin{aligned} (2) \quad 1+3+5+\cdots+55 &= 1+3+5+\cdots+(2 \cdot 28-1) \\ &= 28^2 = 784 \quad \text{答} \end{aligned}$$

## C 等差数列の和の最大

教 p.15

## 練習

14

初項が 100、公差が  $-7$  である等差数列  $\{a_n\}$  がある。

- (1) 第何項が初めて負の数になるか。
- (2) 初項から第何項までの和が最大であるか。また、その和を求めよ。

## 指針 等差数列の項の正負と和の最大

- (1)  $a_n < 0$  を満たす最小の自然数  $n$  を求める。
- (2) 第  $k$  項が初めて負になるとき、初項から第  $(k-1)$  項までの和が最大になる。

解答 (1) 一般項は  $a_n = 100 + (n-1) \cdot (-7)$

$$\text{すなわち } a_n = -7n + 107$$

$$-7n + 107 < 0 \text{ より } n > \frac{107}{7} \qquad \leftarrow \frac{107}{7} = 15.2\cdots$$

これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 16$

したがって、初めて負の数になる項は、第 16 項 である。 答

- (2) (1)より、初項から第 15 項まで の和が最大となり、その和は

$$\frac{1}{2} \cdot 15 \{2 \cdot 100 + (15-1) \cdot (-7)\} = 765 \quad \text{答}$$

補定 第  $k$  項が初めて負になるとき、 $S_2 - S_1 = a_2 > 0$ ,  $S_3 - S_2 = a_3 > 0$ ,  $\cdots$

$$S_{k-1} - S_{k-2} = a_{k-1} > 0 \text{ より } S_2 > S_1, S_3 > S_2, \cdots,$$

$$S_{k-1} > S_{k-2} \text{ すなわち } S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{k-2} < S_{k-1} \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

$$S_k - S_{k-1} = a_k < 0, S_{k+1} - S_k = a_{k+1} < 0, \cdots \text{ より}$$

$$S_k < S_{k-1}, S_{k+1} < S_k, \cdots$$

$$\text{すなわち } S_{k-1} > S_k > S_{k+1} > \cdots \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

①, ②より、 $S_{k-1}$ 、すなわち、初項から第  $(k-1)$  項までの和が最大になることがわかる。

## 4 等比数列

## まとめ

## 1 等比数列

初項に一定の数  $r$  を次々と掛けて得られる数列を 等比数列 といい、その一定の数  $r$  を 公比 という。

例 初項が 3, 公比が 2 の等比数列

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

$\times 2 \quad \times 2 \quad \times 2$

**注意** 一般に, 等比数列の初項と公比は 0 であってもよいが, 教科書で扱う等比数列は, 初項も公比も 0 でないものとする。

## 2 等比数列の一般項

初項  $a$ , 公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$\leftarrow r^0=1 \text{ より } a_1 = a \cdot r^0 = a$$

## 3 等比数列の性質

等比数列は, 隣り合う 2 項の比が常に一定である。等比数列  $\{a_n\}$  について, すべての自然数  $n$  で, 次の関係が成り立つ。

$$a_{n+1} = ra_n \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

## 4 等比数列をなす 3 数

$a, b, c$  が 0 でないとき, 次のことが成り立つ。

数列  $a, b, c$  が等比数列  $\iff b^2 = ac$  ( $b$  を 等比中項 という。)

## A 等比数列

教 p.16

練習  
15

次のような等比数列の初項から第 4 項までを書け。

(1) 初項 1, 公比 5

(2) 初項  $-3$ , 公比  $-\frac{1}{3}$

指針 等比数列の項 前の項に公比  $r$  を掛けて, 次の項を求める。

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

$\times r \quad \times r \quad \times r$

解答 等比数列を  $\{a_n\}$ , 公比を  $r$  とする。

$$(1) \quad a_2 = a_1 r = 1 \cdot 5 = 5, \quad a_3 = a_2 r = 5 \cdot 5 = 25$$

$$a_4 = a_3 r = 25 \cdot 5 = 125$$

答 1, 5, 25, 125

$$(2) \quad a_2 = -3 \left( -\frac{1}{3} \right) = 1, \quad a_3 = 1 \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

$$\text{答} \quad -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

練習  
16

教 p.16

次の等比数列の公比を求めよ。また、□に適する数を求めよ。

- (1)  $1, -2, 4, \square, \dots$       (2)  $\square, 8, 4, \square, \dots$

**指針 等比数列の決定** 等比数列であるから、隣り合う2つの項に着目して、  
(前の項)×(公比)=(後の項) から公比を求める。

**解答** 等比数列を  $\{a_n\}$ 、公比を  $r$  とする。

$$(1) \quad 1 \cdot r = -2 \text{ より } r = -2$$

$$\leftarrow a_1 r = a_2$$

$$\text{第4項 } a_4 \text{ は } a_4 = 4 \cdot (-2) = -8$$

$$\leftarrow a_4 = a_3 r$$

答 公比  $-2$ , □は  $-8$

$$(2) \quad 8r = 4 \text{ より } r = \frac{1}{2}$$

$$\leftarrow a_2 r = a_3$$

$$\text{初項 } a_1 \text{ は } a_1 \cdot \frac{1}{2} = 8 \text{ より } a_1 = 16$$

$$\leftarrow a_1 r = a_2$$

$$\text{第4項 } a_4 \text{ は } a_4 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\leftarrow a_4 = a_3 r$$

答 公比  $\frac{1}{2}$ , □は順に  $16, 2$

## B 等比数列の一般項

教 p.17

練習  
17次のような等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。また、第5項を求めよ。

- (1) 初項  $2$ , 公比  $3$       (2) 初項  $1$ , 公比  $-3$   
(3) 初項  $2$ , 公比  $2$       (4) 初項  $-3$ , 公比  $\frac{1}{2}$

**指針 等比数列の一般項** 等比数列の一般項の公式  $a_n = ar^{n-1}$  に初項  $a$ , 公比  $r$  を代入して一般項を求める。第5項は、得られた  $n$  の式に  $n=5$  を代入すると求められる。

**解答** (1) 初項  $2$ , 公比  $3$  であるから

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{答}$$

$$\text{第5項は } a_5 = 2 \cdot 3^{5-1} = 2 \cdot 3^4 = 162 \quad \text{答}$$

(2) 初項  $1$ , 公比  $-3$  であるから

$$a_n = 1 \cdot (-3)^{n-1} \quad \text{すなわち } a_n = (-3)^{n-1} \quad \text{答}$$

$$\text{第5項は } a_5 = (-3)^{5-1} = (-3)^4 = 81 \quad \text{答}$$

(3) 初項 2, 公比 2 であるから

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^n \quad \text{答}$$

第 5 項は  $a_5 = 2^5 = 32$  答(4) 初項  $-3$ , 公比  $\frac{1}{2}$  であるから

$$a_n = -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{答}$$

$$\text{第 5 項は} \quad a_5 = -3 \left( \frac{1}{2} \right)^{5-1} = -3 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = -\frac{3}{16} \quad \text{答}$$

練習  
18

教 p.17

次の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $1, -2, 4, -8, \dots$

(2)  $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

(3)  $-5, 5, -5, 5, \dots$

(4)  $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$

指針 等比数列の一般項 初項と公比を求め、 $a_n = ar^{n-1}$  に代入する。解答 (1) 公比を  $r$  とすると、初項と第 2 項により

$$1 \cdot r = -2 \quad \text{よって} \quad r = -2$$

初項 1, 公比  $-2$  であるから、一般項は

$$a_n = 1 \cdot (-2)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = (-2)^{n-1} \quad \text{答}$$

(2) 公比を  $r$  とすると、初項と第 2 項により

$$\frac{3}{2}r = \frac{3}{4} \quad \text{よって} \quad r = \frac{1}{2}$$

初項  $\frac{3}{2}$ , 公比  $\frac{1}{2}$  であるから、一般項は

$$a_n = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad \text{答}$$

(3) 公比を  $r$  とすると、初項と第 2 項により

$$-5r = 5 \quad \text{よって} \quad r = -1$$

初項  $-5$ , 公比  $-1$  であるから、一般項は

$$a_n = -5(-1)^{n-1} \quad (a_n = 5(-1)^n) \quad \text{答}$$

(4) 公比を  $r$  とすると、初項と第 2 項により

$$\sqrt{2}r = 2 \quad \text{よって} \quad r = \sqrt{2}$$

初項  $\sqrt{2}$ , 公比  $\sqrt{2}$  であるから、一般項は

$$a_n = \sqrt{2}(\sqrt{2})^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = (\sqrt{2})^n \quad \text{答}$$

練習  
19

次のような等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

- (1) 第2項が6, 第4項が54      (2) 第5項が-9, 第7項が-27

**指針 等比数列の一般項** 初項を  $a$ , 公比を  $r$  として一般項を表し, 与えられた値を代入して,  $a, r$  についての連立方程式を立てる。

**解答** 初項を  $a$ , 公比を  $r$  とすると  $a_n = ar^{n-1}$

(1) 第2項が6であるから  $ar = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

第4項が54であるから  $ar^3 = 54 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より  $r^2 = 9$  これを解くと  $r = \pm 3$

$\textcircled{1}$ から  $r = 3$  のとき  $a = 2$ ,  $r = -3$  のとき  $a = -2$

よって, 一般項は

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -2(-3)^{n-1} \quad \text{答}$$

(2) 第5項が-9であるから  $ar^4 = -9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

第7項が-27であるから  $ar^6 = -27 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より  $r^2 = 3$  これを解くと  $r = \pm \sqrt{3}$

$\textcircled{1}$ から  $r = \sqrt{3}$  のとき  $a = -1$ ,  $r = -\sqrt{3}$  のとき  $a = -1$

よって, 一般項は

$$a_n = -(\sqrt{3})^{n-1} \quad \text{または} \quad a_n = -(-\sqrt{3})^{n-1} \quad \text{答}$$

公比が異なると,  
一般項も変わること  
に注意しよう。



## C 等比数列の性質

練習  
20

数列  $3, x, 9, \cdots$  が等比数列であるとき,  $x$  の値を求めよ。

**指針 等比数列をなす3数** 数列  $a, b, c$  が等比数列をなすとき,  $b^2 = ac$  が成り立つ。

**解答** 数列  $3, x, 9$  は等比数列であるから

$$x^2 = 3 \cdot 9 = 27$$

よって  $x = \pm \sqrt{27} = \pm 3\sqrt{3} \quad \text{答}$

## 5 等比数列の和

まとめ

## 等比数列の和

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$r \neq 1 \text{ のとき} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{または} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad S_n = na$$

$$\text{補足} \quad r \neq 1 \text{ のとき} \quad \frac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}$$

## A 等比数列の和の公式

教 p.20

練習  
21次の等比数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ。

$$(1) \quad 1, 2, 2^2, 2^3, \dots \quad (2) \quad 2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, -\frac{2}{3^3}, \dots$$

指針 等比数列の和 まず初項、公比を求めて、等比数列の和の公式にあてはめる。

$r < 1$  のときは、 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$  を、 $r > 1$  のときは、 $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$  を用いるとよい。

解答 (1) 初項 1、公比 2 より

← 公比  $r > 1$ 

$$S_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1 \quad \text{答}$$

(2) 初項 2、公比  $-\frac{1}{3}$  より← 公比  $r < 1$ 

$$S_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \left( -\frac{1}{3} \right)} = \frac{6 \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{3 \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right) \right\}} = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left( -\frac{1}{3} \right)^n \right\} \quad \text{答}$$

教 p.20

練習  
22初項から第 3 項までの和が 7、第 3 項から第 5 項までの和が 28 である等比数列の初項  $a$  と公比  $r$  を求めよ。

指針 和が与えられた等比数列 次の式が成り立つことに着目する。

$$a + ar + ar^2 = 7, \quad ar^2 + ar^3 + ar^4 = r^2(a + ar + ar^2)$$

解答 条件から  $a + ar + ar^2 = 7 \quad \cdots \cdots \text{①}$ 

$$ar^2 + ar^3 + ar^4 = 28 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{②より} \quad r^2(a + ar + ar^2) = 28$$

$$\textcircled{1} \text{を代入して } 7r^2=28 \quad r^2=4 \quad \text{よって } r=\pm 2$$

$$r=2 \text{を}\textcircled{1}\text{に代入すると } a+2a+4a=7 \quad \text{よって } a=1$$

$$r=-2 \text{を}\textcircled{1}\text{に代入すると } a-2a+4a=7 \quad \text{よって } a=\frac{7}{3}$$

$$\text{したがって } a=1, r=2 \text{ または } a=\frac{7}{3}, r=-2 \quad \text{答}$$

## 研究 複利計算

### まとめ

#### 複利計算

一定期間の終わりごとに、その元利合計を次の期間の元金とする利息の計算は、**複利計算**と呼ばれる。

**例** 年利率2%，1年ごとの複利で、毎年 $a$ 円ずつ積み立てるとき、10年間の元利合計 $S$ 円を求めてみよう。

$a$ 円を $n$ 年間預けると、元利合計は $a \times 1.02^n$ 円になるから、

$$\begin{aligned} S &= a \times 1.02 + a \times 1.02^2 + a \times 1.02^3 + \cdots + a \times 1.02^{10} \\ &\quad \begin{array}{ccccccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{1年間} & \text{2年間} & \text{3年間} & \cdots & \text{10年間} \end{array} \\ &= a(1.02 + 1.02^2 + 1.02^3 + \cdots + 1.02^{10}) \end{aligned}$$

( )内は、初項1.02、公比1.02、項数10の等比数列の和であるから

$$S = a \times \frac{1.02(1.02^{10} - 1)}{1.02 - 1}$$

$1.02^{10} \div 1.219$ であるから  $S \div 11.169a$ となる。

#### 練習 1

年利率1%，1年ごとの複利で、毎年初めにお金を積み立て、10年後に120万円にしたい。毎年初めに積み立てるお金をいくらにすればよいか。 $1.01^{10} = 1.10462$ とし、小数第1位を四捨五入して求めよ。

**指針 複利計算** 毎年初めに $a$ 円ずつ積み立てるとする。「まとめ」と同じようにして、まず、10年間の元利合計を $a$ の式で表す。

**解答** 毎年初めに $a$ 円ずつ積み立てるとし、10年間の元利合計を $S$ 円とすると

$$\begin{aligned} S &= a(1.01 + 1.01^2 + 1.01^3 + \cdots + 1.01^{10}) \\ &= a \times \frac{1.01(1.01^{10} - 1)}{1.01 - 1} = a \times \frac{1.01}{0.01} \times (1.10462 - 1) \\ &= a \times 101 \times 0.10462 = 10.56662 \times a \end{aligned}$$

10年後に120万円になるとすると  $10.56662 \times a = 1200000$

したがって、 $a = 113565.1 \cdots$

すなわち、毎年初めに積み立てるお金は **113565円** 答

### 教 p.21

## コラム フィボナッチ数列

1  
章  
数  
列

教 p.22

## 練習

フィボナッチ数列の項にはどのような規則があるといえるだろうか。  
また、フィボナッチ数列がもつ性質を見つけたり、フィボナッチ数列に  
関係する事柄を調べてみよう。

**指針** フィボナッチ数列 項を書き出すと次のようになっている。

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,  
1597, 2584, ……

この数列の項や、項の間に成り立つ関係や、項の番号と項の数との関係を推測してみるとよい。

**解答** (フィボナッチ数列の規則)

(例) 第3項以降の項は、1つ前の項と2つ前の項の和になっている。すなわち、フィボナッチ数列は次のような規則によって定められている。

$$a_1=1, a_2=1, a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(フィボナッチ数列の性質)

(例1) 第 $n$ 項が偶数になるのは、 $n$ が3の倍数のときのみである。

(例2) 第 $n$ 項が5の倍数になるのは、 $n$ が5の倍数のときのみである。

(例3) 2つの項について、項の番号を6で割った余りが等しいとき、項の数を4で割った余りは等しい。

(フィボナッチ数列に關係する事柄)

(例) 初項を1, 第2項を3とし、第3項以降をフィボナッチ数列と同様に、ある項が1つ前の項と2つ前の項の和になるように定めた数列をリュカ数列といい、次のようになる。

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ……

この数列の一般項 $l_n$ は  $l_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$  となる。

すなわち、黄金比 $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いれば  $l_n = \phi^n + (1-\phi)^n$  となる。

**参考** 例1～例3の性質は、あとで学習する「数学的帰納法」を用いることにより、正しいことが証明できる。

## 第1章 第1節

## 問題

教 p.23

- 1 4, 2,  $x$ ,  $y$  の逆数を項とする数列  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}$  が等差数列となる  
とき,  $x, y$  の値を求めよ。

**指針** 等差数列の性質 等差数列は隣り合う2項の差が常に一定であるから

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad \text{より} \quad \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \text{ を求める。}$$

**解答** 隣り合う2項の差が常に一定であるから

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \quad \text{よって} \quad x = \frac{4}{3} \quad \text{答}$$

$$\text{これを} \textcircled{2} \text{ に代入して } \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{y} - \frac{3}{4} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{y} = 1$$

$$\text{したがって} \quad y = 1 \quad \text{答}$$

**参考** 各項が0と異なり, その逆数が等差数列になる数列を 調和数列 という。

教 p.23

- 2 等差数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。 $a_3=4, S_4=20$  のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 数列  $\{a_n\}$  の初項と公差を求めよ (2)  $S_n$  を求めよ。

**指針** 等差数列の初項と公差, 和 初項  $a$ , 公差  $d$  の等差数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  は,  
 $a_n = a + (n-1)d$ , 初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\} \quad \text{となることを利用する。}$$

- (1)  $a_3=4, S_4=20$  から  $a, d$  についての連立方程式を立てる。

**解答** (1) 数列  $\{a_n\}$  の初項を  $a$ , 公差を  $d$  とすると,  $a_3=4$  から

$$a + 2d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } S_4 = 20 \text{ から } \frac{1}{2} \cdot 4 \{2a + (4-1)d\} = 20$$

$$\text{式を整理すると } 2a + 3d = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = 8, d = -2 \quad \text{答} \quad \text{初項 } 8, \text{ 公差 } -2$$

$$(2) (1) \text{ より } S_n = \frac{1}{2} n \{2 \cdot 8 + (n-1) \cdot (-2)\}$$

$$= \frac{1}{2} n (-2n + 18) = -n(n-9) \quad \text{答}$$



したがって、 $a_n < 0$  となる最小の  $n$  を求めると、初項から第  $(n-1)$  項までの和が最大となる。

**解答** 一般項は  $a_n = 200 + (n-1) \cdot (-6) = -6n + 206$

$$(1) \quad -6n + 206 = 50 \text{ とすると } \quad -6n = -156 \quad \text{よって} \quad n = 26$$

したがって、50 は 第 26 項 である。 〔答〕

$$(2) \quad \text{第 } n \text{ 項が負の数になるとすると} \quad -6n + 206 < 0 \quad \text{よって} \quad n > \frac{103}{3}$$

これを満たす最小の自然数  $n$  は  $n = 35$

したがって、第 35 項が初めて負の数になるから、初項から 第 34 項 までの和が最大である。

$$\text{また、その和は} \quad \frac{1}{2} \cdot 34 \{ 2 \cdot 200 + (34-1) \cdot (-6) \} = 3434 \quad \text{〔答〕}$$

## 教 p.23

- 5 第 2 項が 3、第 5 項が 24 である等比数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。ただし、公比は実数とする。

**指針** 等比数列の一般項 初項を  $a$ 、公比を  $r$  として、与えられた条件をもとに  $a$ 、 $r$  についての連立方程式を立てる。

**解答** 初項を  $a$ 、公比を  $r$  とする。

$$\text{第 2 項が 3 であるから} \quad ar = 3 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$\text{第 5 項が 24 であるから} \quad ar^4 = 24 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①, ②より} \quad r^3 = 8 \quad r \text{ は実数であるから} \quad r = 2$$

$$\text{①から、} r = 2 \text{ のとき} \quad a = \frac{3}{2}$$

$$\text{したがって} \quad a_n = \frac{3}{2} \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-2} \quad \text{〔答〕}$$

## 教 p.23

- 6 第 2 項が 3、初項から第 3 項までの和が 13 である等比数列の初項と公比を求めよ。

**指針** 和が与えられた等比数列 公比を  $r$  とし、第 2 項をもとにして、初項と第 3 項を  $r$  の式で表す。

**解答** 公比を  $r$  とする。

$$\text{第 2 項が 3 であるから、初項は} \quad \frac{3}{r} \quad \cdots \cdots \text{①} \quad \text{第 3 項は } 3r$$

初項から第 3 項までの和が 13 であるから

$$\frac{3}{r} + 3 + 3r = 13 \quad \text{これより} \quad 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

因数分解して  $(r-3)(3r-1)=0$  よって  $r=3, \frac{1}{3}$

$r=3$  のとき, ①より, 初項は  $\frac{3}{3}=1$

$r=\frac{1}{3}$  のとき, ①より, 初項は  $3 \div \frac{1}{3}=9$

☐ 初項 1, 公比 3 または 初項 9, 公比  $\frac{1}{3}$

教 p.23

7 1 から 200 までの自然数について, 3 で割って 1 余る数の和を求めよ。

指針 等差数列の和 3 で割って 1 余る数は等差数列である。初項, 末項, 項数を求めて, 等差数列の和の公式  $S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$  を利用する。

解答 1 から 200 までの自然数のうち, 3 で割って 1 余る数は

$$3 \cdot 0 + 1, 3 \cdot 1 + 1, 3 \cdot 2 + 1, \dots, 3 \cdot 66 + 1$$

となる。この数列は, 初項 1, 末項  $(3 \cdot 66 + 1 =) 199$ , 項数 67 の等差数列であるから, その和  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 67(1 + 199) = 6700 \quad \text{☐}$$

教 p.23

8 次の 2 種類の貯金の方法を考える。

方法 A : 1 日目に 300 円貯金する。2 日目以降は, 前の日より 100 円多い金額を貯金する。

方法 B : 1 日目に 4 円貯金する。2 日目以降は, 前の日の 3 倍の金額を貯金する。

7 日間貯金を行った場合, A と B のどちらが多く貯金できるか。

指針 等差数列の和・等比数列の和

方法 A では, 貯金する金額は 1 日ごとに 100 円ずつ増加するから, 貯金する金額の数列は等差数列になる。方法 B では, 貯金する金額は 1 日ごとに 3 倍になるから, 貯金する金額の数列は等比数列になる。

解答 方法 A の貯金の総額は, 初項 300, 公差 100, 項数 7 の等差数列の和である

$$\text{から } \frac{1}{2} \cdot 7 \{ 2 \cdot 300 + (7-1) \cdot 100 \} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1200 = 4200 (\text{円})$$

方法 B の貯金の総額は, 初項 4, 公比 3, 項数 7 の等比数列の和であるから

$$\frac{4(3^7-1)}{3-1} = \frac{4 \cdot 2186}{2} = 4372 (\text{円})$$

したがって, B の方が多く貯金できる。 ☐

## 第2節 いろいろな数列

6 和の記号 $\Sigma$ 

まとめ

## 1 自然数の累乗の和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

2 和の記号 $\Sigma$ 

数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 $n$ 項までの和を、 $\sum_{k=1}^n a_k$ と書く。

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

**注意**  $\Sigma$  はギリシャ文字で、「シグマ」と読む。

## 3 自然数に関する和の公式

$$\sum_{k=1}^n c = nc \quad \text{とくに} \quad \sum_{k=1}^n 1 = n \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

4 和の記号 $\Sigma$ の性質

$$\textcircled{1} \quad \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\textcircled{2} \quad \sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{ただし、} p \text{ は } k \text{ に無関係な定数}$$

$$\text{注意} \quad \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \text{ も成り立つ。}$$

## A 自然数の累乗の和

教 p.25

練習  
23

恒等式 $k^4 - (k-1)^4 = 4k^3 - 6k^2 + 4k - 1$ を用いて、次の等式を証明せよ。

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

**指針** 自然数の3乗の和 教科書 p.24 の2乗の和の公式の証明と同様に、恒等式に $k=1, 2, \dots, n$ を代入して、辺々を加える。

**解答**  $S=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$  とする。

恒等式  $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$  において

$$k=1 \text{ とすると } 1^4-0^4=4\cdot 1^3-6\cdot 1^2+4\cdot 1-1$$

$$k=2 \text{ とすると } 2^4-1^4=4\cdot 2^3-6\cdot 2^2+4\cdot 2-1$$

$$k=3 \text{ とすると } 3^4-2^4=4\cdot 3^3-6\cdot 3^2+4\cdot 3-1$$

.....

$$k=n \text{ とすると } n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$$

これら  $n$  個の等式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} n^4 &= 4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2) \\ &\quad +4(1+2+3+\cdots+n)-n \end{aligned}$$

$$=4S-6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } 4S &= n^4+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)+n \\ &= n\{n^3+(n+1)(2n+1)-2(n+1)+1\} \\ &= n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2) \\ &= n(n+1)(n^2+n)=n^2(n+1)^2=\{n(n+1)\}^2 \end{aligned}$$

$$\text{よって } S=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

$$\text{すなわち } 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2 \quad \text{終}$$

**練習**  
24

次の和を求めよ。

$$(1) \quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2$$

$$(2) \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$$

**指針** 自然数の2乗, 3乗の和 1 から  $n$  までの自然数の2乗, 3乗の和は

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

**解答** (1)  $\frac{1}{6}\cdot 20(20+1)(2\cdot 20+1)=\frac{1}{6}\cdot 20\cdot 21\cdot 41=2870$  答

(2)  $\left\{\frac{1}{2}\cdot 15(15+1)\right\}^2=(15\cdot 8)^2=120^2=14400$  答

B 和の記号  $\Sigma$ 

教 p.26

練習  
25

次の(1)~(3)の式を教科書の例 10 のような和の形で書け。(4), (5)の式を和の記号  $\Sigma$  を用いて書け。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k-1) \quad (2) \sum_{k=3}^8 2^{k-1} \quad (3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$(4) 2+3+4+5+6 \quad (5) 3^2+5^2+7^2+9^2+11^2+13^2$$

**指針** 和の記号  $\Sigma$  とえば,  $\sum_{k=4}^8 a_k$  であれば, 第 4 項から第 8 項までの和であり,

$\sum_{k=4}^8 a_k = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$  となる。このように,  $\sum_{k=p}^q a_k$  においては,  $\Sigma$  の下の  $k=p$  の  $p$  は, 和の最初の項の番号,  $\Sigma$  の上の  $q$  は, 和の最後の項の番号を表していることに注意する。

**解答** (1)  $\sum_{k=1}^n (2k-1) = (2 \cdot 1 - 1) + (2 \cdot 2 - 1) + (2 \cdot 3 - 1) + \cdots + (2n - 1)$

$$= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \quad \text{答}$$

$$(2) \sum_{k=3}^8 2^{k-1} = 2^{3-1} + 2^{4-1} + 2^{5-1} + 2^{6-1} + 2^{7-1} + 2^{8-1}$$

$$= 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 \quad \text{答}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad \text{答}$$

(4) 初項を 2 として一般項を  $k$  を用いた式で表すと

$$a_k = 2 + (k-1) \cdot 1 = k+1$$

$k+1=6$  のとき  $k=5$  であるから, 初項から第 5 項までの和になっている。

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^5 (k+1) \quad \text{答}$$

(5) 3 から 13 までの奇数の 2 乗の和である。

初項を 3 として一般項を  $k$  を用いた式で表すと

$$a_k = \{3 + (k-1) \cdot 2\}^2 = (2k+1)^2$$

$2k+1=13$  のとき  $k=6$  であるから, 初項から第 6 項までの和になっている。

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^6 (2k+1)^2 \quad \text{答}$$

**別解** (4) 2 から 6 までの自然数の和であるから  $\sum_{k=2}^6 k \quad \text{答}$

(5) 正の奇数を表す数列の第  $k$  項は  $1 + (k-1) \cdot 2 = 2k-1$  であり,  $2k-1=3$

$$\text{より } k=2, \quad 2k-1=13 \text{ より } k=7 \text{ であるから} \quad \sum_{k=2}^7 (2k-1)^2 \quad \text{答}$$

練習  
26

次の和を求めよ。

(1)  $\sum_{k=1}^n 5^{k-1}$

(2)  $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$

指針  $\Sigma$  を用いて表された等比数列の和 初項, 公比, 項数がいくつであることを確認し, 等比数列の和の公式を利用する。

$r \neq 1$  のとき, 初項  $a$ , 公比  $r$ , 項数  $n$  の等比数列の和は  $\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

解答 (1) 初項 1, 公比 5, 項数  $n$  であるから  $\sum_{k=1}^n 5^{k-1} = \frac{5^n - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$  答

(2) 初項 3, 公比 3, 項数  $n-1$  であるから

$$\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = \frac{3(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 3) \quad \text{答}$$

練習  
27

次の和を求めよ。

(1)  $\sum_{k=1}^{15} 2$

(2)  $\sum_{k=1}^{50} k$

(3)  $\sum_{k=1}^{12} k^2$

(4)  $\sum_{k=1}^7 k^3$

指針 自然数に関する和の公式 和の公式  $\sum_{k=1}^n c = nc$ ,  $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ,

$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ ,  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2$  を利用する。

解答 (1)  $\sum_{k=1}^{15} 2 = 15 \cdot 2 = 30$  答

$$(2) \sum_{k=1}^{50} k = \frac{1}{2} \cdot 50(50+1) = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 51 = 1275 \quad \text{答}$$

$$(3) \sum_{k=1}^{12} k^2 = \frac{1}{6} \cdot 12(12+1)(2 \cdot 12+1) = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 13 \cdot 25 = 650 \quad \text{答}$$

$$(4) \sum_{k=1}^7 k^3 = \left\{ \frac{1}{2} \cdot 7(7+1) \right\}^2 = (7 \cdot 4)^2 = 28^2 = 784 \quad \text{答}$$

C 和の記号  $\Sigma$  の性質練習  
28

次の和を求めよ。

(1)  $\sum_{k=1}^n (4k-5)$

(2)  $\sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4)$

(3)  $\sum_{k=1}^n (k^3 + k)$

(4)  $\sum_{k=1}^{n-1} 2k$

**指針**  $\Sigma$  の計算  $\Sigma$  の性質と自然数の和の公式を利用する。

$$\Sigma \text{ の性質 } \sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n p a_k = p \sum_{k=1}^n a_k \quad (p \text{ は } k \text{ に無関係な定数})$$

$$\text{自然数の和の公式 } \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n c = nc$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

**解答** (1)  $\sum_{k=1}^n (4k-5) = 4 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 5 = 4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 5n = 2n^2 - 3n = n(2n-3)$  答

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{k=1}^n (3k^2 - 7k + 4) &= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 7 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 4 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 7 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 4n \\ &= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) - 7(n+1) + 8 \} \\ &= \frac{1}{2} n (2n^2 - 4n + 2) = n(n^2 - 2n + 1) = n(n-1)^2 \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \sum_{k=1}^n (k^3 + k) &= \sum_{k=1}^n k^3 + \sum_{k=1}^n k = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{2} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) + 1 \right\} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + n + 2) \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{n-1} 2k = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \} = n(n-1) \quad \text{答}$$

**練習**  
29

次の和を求めよ。

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

**指針** 数列の和 数列の第  $k$  項を  $k$  で表し、 $\Sigma$  の性質を利用する。

**解答** これは、第  $k$  項が  $k(k+1)(k+2)$  である数列の、初項から第  $n$  項までの和である。よって、求める和は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^n (k^3 + 3k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 + 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 + 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{4} n(n+1) \{ n(n+1) + 2(2n+1) + 4 \} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + 5n + 6) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \text{答} \end{aligned}$$

## 7 階差数列

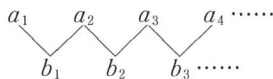
## まとめ

## 1 階差数列

数列  $\{a_n\}$  の隣り合う 2 項の差

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を項とする数列  $\{b_n\}$  を、数列  $\{a_n\}$  の 階差数列という。



## 2 階差数列と一般項

数列  $\{a_n\}$  の階差数列を  $\{b_n\}$  とすると

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

**注意** 上の  $a_n$  はあくまで  $n \geq 2$  のときの一般項であり、 $n=1$  のときにも成り立つとは限らない。よって、 $n=1$  のときについては、別に確かめる必要がある。

## 3 数列の和と一般項

数列  $\{a_n\}$  の初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和を  $S_n$  とすると

$$\text{初項 } a_1 \text{ は} \quad a_1 = S_1$$

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

## A 階差数列

教 p.29

練習  
30

階差数列を考えて、次の数列の第 6 項、第 7 項を求めよ。

$$1, 2, 5, 10, 17, \dots$$

**指針** 階差数列の項 もとの数列を  $\{a_n\}$ 、その階差数列を  $\{b_n\}$  とし、まず、数列  $\{b_n\}$  の一般項を求める。

次に、 $b_5, b_6$  を求め、 $a_6 - a_5 = b_5, a_7 - a_6 = b_6$  より、 $a_6, a_7$  を求める。

**解答** 数列  $1, 2, 5, 10, 17, \dots$  を  $\{a_n\}$  とする。

階差数列  $\{b_n\}$  は  $1, 3, 5, 7, \dots$

初項 1、公差 2 の等差数列であるから、一般項は

$$b_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

$$a_6 - a_5 = b_5 \text{ から} \quad a_6 = a_5 + b_5 = 17 + (2 \cdot 5 - 1) = 26$$

$$a_7 - a_6 = b_6 \text{ から} \quad a_7 = a_6 + b_6 = 26 + (2 \cdot 6 - 1) = 37$$

**答** 第 6 項 26、第 7 項 37

## B 階差数列から一般項を求める

教 p.31

練習  
31階差数列を利用して、次の数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

- (1) 1, 2, 4, 7, 11, …… (2) 2, 3, 5, 9, 17, ……

指針 階差数列と一般項 まず、数列  $\{a_n\}$  の階差数列  $\{b_n\}$  の一般項を求め、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad (n \geq 2) \text{ を求める。}$$

解答 (1) 数列  $\{a_n\}$  の階差数列は 1, 2, 3, 4, ……その一般項を  $b_n$  とすると  $b_n = n$ 

$$\text{よって、} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{1}{2}(n-1)n$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$$

初項は  $a_1 = 1$  なので、この式は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項は} \quad a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 \quad \text{答}$$

(2) 数列  $\{a_n\}$  の階差数列は 1, 2, 4, 8, ……その一般項を  $b_n$  とすると、数列  $\{b_n\}$  は初項 1、公比 2 の等比数列であるから  $b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$ 

$$\text{よって、} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2^{n-1} + 1$$

初項は  $a_1 = 2$  なので、この式は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項は} \quad a_n = 2^{n-1} + 1 \quad \text{答}$$

## C 数列の和と一般項

教 p.31

練習  
32初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が、 $S_n = n^2 - n$  で表される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。指針 数列の和と一般項 初項から第  $n$  項  $a_n$  までの和  $S_n$  がわかっているとき、初項は  $a_1 = S_1$ 、 $n \geq 2$  のときは、 $a_n = S_n - S_{n-1}$  で与えられる。解答 初項  $a_1$  は  $a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$  …… ①

$$n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$$

$$\text{すなわち} \quad a_n = 2n - 2$$

①より  $a_1 = 0$  であるから、この式は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、一般項は} \quad a_n = 2n - 2 \quad \text{答}$$

## 8 いろいろな数列の和

まとめ

## 和の求め方の工夫

## ① 分数の数列の和

恒等式  $\frac{1}{(k-a)(k-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{k-a} - \frac{1}{k-b} \right)$  などを利用する。

② 数列  $\{a_n r^{n-1}\}$  の和  $S$ 

等比数列の和の公式を導いたのと同様に、 $S$  と  $rS$  の差を計算する。

練習  
33

教 p.32

恒等式  $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$  を利用して、和  

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
 を求めよ。

指針 分数の数列の和 与えられた恒等式を用いて各項を分解すると、ほとんどの項が互いに打ち消し合って、計算が簡単になる。

解答

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n+1-1}{2(2n+1)} \\
 &= \frac{n}{2n+1} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習  
34

教 p.32

次の和  $S$  を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}$$

指針 数列  $\{a_n r^{n-1}\}$  の和 一般項が  $n \cdot 3^{n-1}$  で表される数列の和  $S$  である。 $S$  と  $rS$  の差を計算するとよい。

解答

$$\begin{aligned}
 S &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^{n-1} \\
 3S &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (n-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^n
 \end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$S - 3S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n$$

よって  $-2S = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} - n \cdot 3^n$

$$\begin{aligned} \text{したがって } S &= \frac{1}{-2} \left\{ \frac{3^n - 1}{2} - n \cdot 3^n \right\} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2n) \cdot 3^n - 1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \{(2n-1) \cdot 3^n + 1\} \quad \text{答} \end{aligned}$$

練習  
35

教 p.33

正の奇数の列を、次のような群に分ける。ただし、第  $n$  群には  $n$  個の数が入るものとする。

1       |    3, 5    |    7, 9, 11   |    13, 15, 17, 19   |    21, .....  
第1群        第2群        第3群                    第4群

- (1) 第  $n$  群の最初の数  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (2) 第 15 群に入るすべての数の和  $S$  を求めよ。

## 指針 群に分けた数列

- (1) 第  $n$  群は  $n$  個の奇数を含むから、第  $(n-1)$  群の末項までに  $\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$  個の奇数がある。よって、第  $n$  群の最初の項は、正の奇数の列 1, 3, 5, ..... の  $\{1+2+3+\cdots+(n-1)+1\}$  番目の項である。
- (2) 第 15 群の最初の数  $a_{15}$  を初項とし、公差が 2、項数 15 の等差数列の和である。

解答 (1)  $n \geq 2$  のとき、第 1 群から第  $(n-1)$  群までに入る正の奇数の個数は

$$1+2+3+\cdots+(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

求める数は、正の奇数の列の第  $\left\{ \frac{1}{2}n(n-1)+1 \right\}$  項であるから

$$2 \left\{ \frac{1}{2}n(n-1)+1 \right\} - 1 = n^2 - n + 1$$

これは、 $n=1$  のときにも成り立つ。

よって、第  $n$  群の最初の数  $a_n$  は  $n^2 - n + 1$     答

- (2) 第 15 群の最初の数  $a_{15}$  は、(1)の結果を用いて  $15^2 - 15 + 1 = 211$

よって、和  $S$  は、初項 211、公差 2、項数 15 の等差数列の和であるから

$$S = \frac{1}{2} \cdot 15 \{2 \cdot 211 + (15-1) \cdot 2\} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 450 = 3375 \quad \text{答}$$

9 次の和を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (3^k + 2k + 1) \quad (2) \sum_{k=1}^n (k-1)(k+2) \quad (3) \sum_{k=1}^n (k^3 - k)$$

指針  $\Sigma$  の計算(1)  $\Sigma$  の性質を利用し,  $\sum_{k=1}^n 3^k$ ,  $2 \sum_{k=1}^n k$ ,  $\sum_{k=1}^n 1$  の和に分解する。 $\sum_{k=1}^n 3^k$  は, 初項 3,公比 3, 項数  $n$  の等比数列の和である。(2) まず,  $(k-1)(k+2)$  を展開して,  $\Sigma$  の性質を利用する。解答 (1)  $\sum_{k=1}^n (3^k + 2k + 1) = \sum_{k=1}^n 3^k + 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$ 

$$= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} + 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n$$

$$= \frac{3}{2} (3^n - 1) + n^2 + 2n \quad \text{答}$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (k-1)(k+2) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k - 2)$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) - 2n$$

$$= \frac{1}{6} n \{ (n+1)(2n+1) + 3(n+1) - 12 \}$$

$$= \frac{1}{6} n (2n^2 + 6n - 8) = \frac{1}{3} n (n^2 + 3n - 4)$$

$$= \frac{1}{3} n (n-1)(n+4) \quad \text{答}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n (k^3 - k) = \sum_{k=1}^n k^3 - \sum_{k=1}^n k = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right\} = \frac{1}{4} n(n+1)(n^2 + n - 2)$$

$$= \frac{1}{4} n (n-1)(n+1)(n+2) \quad \text{答}$$

10 次の数列の第  $k$  項を  $k$  の式で表せ。また、初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めよ。

$$1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+n, \dots$$

**指針** 和の形の数列 各項がそれぞれ自然数の和になっていることに着目して第  $k$  項  $a_k$  を求める。さらに、 $\sum_{k=1}^n a_k$  を計算して和  $S_n$  を求める。

**解答** 第  $k$  項は  $1+2+3+\dots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$  ㊟

$$\begin{aligned} \text{また } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{12} n(n+1)\{(2n+1)+3\} \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \quad \text{㊟} \end{aligned}$$

11 初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が、 $S_n=n^2+1$  で表される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

**指針** 数列の和と一般項  $a_1=S_1$ ,  $a_n=S_n-S_{n-1}$  ( $n \geq 2$ )

**解答** 初項  $a_1$  は  $a_1=S_1=1^2+1=2$  …… ①

$$n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+1) - \{(n-1)^2+1\}$$

$$\text{すなわち } a_n = 2n-1$$

①より、 $a_1=2$  であるから、この式は  $n=1$  のときは成り立たない。

よって、一般項は

$$a_1=2, n \geq 2 \text{ のとき } a_n=2n-1 \quad \text{㊟}$$

初項  $a_1$  が  $n \geq 2$  のときの式で表せないこともあることに注意しよう。



12 次の和を求めよ。

(1)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$

(2)  $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} \quad (n \geq 2)$

指針 差の形を利用する  $\Sigma$  の計算

(1)  $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$  の分母を有理化すると、差の形になる。

(2)  $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$  とすると、差の形になる。

差の形の  $\Sigma$  の計算は、各項が互いに打ち消し合って簡単な形になる。

解答 (1)  $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(k+1) - k}$   
 $= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

よって  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$   
 $= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots$   
 $\dots + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$   
 $= \sqrt{n+1} - 1$  答

(2)  $\frac{2}{k(k+2)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}$

よって  $\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$   
 $= \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \dots$   
 $\dots + \left( \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$   
 $= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$   
 $= \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$   
 $= \frac{3n^2 + 9n + 6 - 2n - 4 - 2n - 2}{2(n+1)(n+2)} = \frac{3n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)}$   
 $= \frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$  答

13 次の数列の和  $S$  を求めよ。

$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

指針 数列  $\{a_n r^{n-1}\}$  の和  $S$  と  $3S$  の差を計算する。

解答 
$$S = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$3S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 3^{n-1} + (2n-1) \cdot 3^n$$

の辺々を引くと 
$$S - 3S = 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

ゆえに 
$$-2S = 1 + 2(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}) - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} - (2n-1) \cdot 3^n$$

$$= -(2n-2) \cdot 3^n - 2$$

よって 
$$S = (n-1) \cdot 3^n + 1 \quad \square$$

14 自然数の列を次のような群に分ける。ただし、第  $n$  群には  $(2n-1)$  個の数が入るものとする。

$$\begin{array}{ccc} 1 & | & 2, 3, 4 \quad | \quad 5, 6, 7, 8, 9 \quad | \quad 10, \cdots \\ \text{第1群} & & \text{第2群} \qquad \qquad \text{第3群} \end{array}$$

(1) 第  $n$  群の最初の自然数を  $n$  の式で表せ。

(2) 第  $n$  群に入るすべての自然数の和  $S$  を求めよ。

指針 群に分けた数列

(1) 第  $k$  群に  $(2k-1)$  個の項を含むから、第  $(n-1)$  群の末項までに  $[1+3+5+\cdots+(2(n-1)-1)]$  個の自然数がある。

(2) 第  $n$  群の最初の数を初項とし、公差 1、項数  $2n-1$  の等差数列の和である。

解答 (1)  $n \geq 2$  のとき、第 1 群から第  $(n-1)$  群までに入る自然数の個数は

$$\sum_{k=1}^{n-1} (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$$

この自然数の個数は第  $(n-1)$  群の最後の数と一致する。

よって、第  $n$  群の最初の自然数は  $(n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

これは、 $n=1$  のときにも成り立つ。

したがって、第  $n$  群の最初の自然数は  $n^2 - 2n + 2$   $\square$

(2) 求める和  $S$  は初項  $n^2 - 2n + 2$ 、公差 1、項数  $2n-1$  の等差数列の和であるから

$$S = \frac{1}{2} (2n-1) [2(n^2 - 2n + 2) + \{(2n-1)-1\} \cdot 1]$$

$$= (2n-1)(n^2 - n + 1) \quad \square$$

## 15 教科書の24ページの考え方と、恒等式

$3k(k+1)=k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)$  を用いて、次の公式を証明せよ。なお、24ページ同様、自然数の和の公式

$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$  は使用してよいものとする。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

## 指針 自然数の2乗の和の公式

教科書 p.24 の証明と同様に、与えられた恒等式に  $k=1, 2, \dots, n$  を代入して、辺々を加える。

解答  $3k(k+1)=k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)$  より

$$3(k^2+k)=k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①において

$$k=1 \text{ とすると } 3(1^2+1)=1 \cdot 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 2$$

$$k=2 \text{ とすると } 3(2^2+2)=2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$k=3 \text{ とすると } 3(3^2+3)=3 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\cdots \cdots \quad \cdots \cdots \cdots$$

$$k=n \text{ とすると } 3(n^2+n)=n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)$$

これら  $n$  個の等式の辺々を加えると

$$3\{(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)\}=n(n+1)(n+2)$$

$$\text{よって } (1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$\text{したがって } 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{2(n+2)-3\}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\text{ゆえに } 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{図}$$

## 第3節 漸化式と数学的帰納法

## 9 漸化式

まとめ

## 1 漸化式

数列  $\{a_n\}$  は、次の2つの条件[1], [2]を与えると、

$a_2, a_3, a_4, \dots$  が順に求められ、すべての項がただ1通りに定まる。

[1] 初項  $a_1$

[2]  $a_n$  から  $a_{n+1}$  を決める関係式 ( $n=1, 2, 3, \dots$ )

[2] のように、数列において前の項から次の項を決めるための関係式を **漸化式** という。今後、とくに断らなくても、与えられた漸化式は

$n=1, 2, 3, \dots$  で成り立つものとする。

## 2 等差数列, 等比数列を表す漸化式

等差数列  $\{a_n\}$  の漸化式は  $a_{n+1} = a_n + d$

←  $d$  が公差

等比数列  $\{a_n\}$  の漸化式は  $a_{n+1} = ra_n$

←  $r$  が公比

## 3 階差数列と漸化式

$a_{n+1} = a_n + (n \text{ の式})$  の形の漸化式では、( $n$  の式) が階差数列の一般項を表すので、階差数列を利用して一般項が求められることがある。

4  $a_{n+1} = pa_n + q$  の形の漸化式

一般に、 $p \neq 0, p \neq 1$  のとき、 $a_{n+1} = pa_n + q$  の形の漸化式は、等式  $c = pc + q$  を満たす  $c$  を用いて、次の形に変形できる。

$$a_{n+1} - c = p(a_n - c)$$

← 数列  $\{a_n - c\}$  は等比数列

## A 数列の漸化式と項

教 p.35

練習  
36

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の第2項から第5項を求めよ。

(1)  $a_1 = 100, a_{n+1} = a_n - 5$

(2)  $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 2$

**指針** 漸化式と項 漸化式に  $n=1, 2, \dots$  を代入し、 $a_1$  から  $a_2$ 、 $a_2$  から  $a_3$ 、……と順番に求めていく。

**解答** (1)  $a_2 = a_1 - 5 = 100 - 5 = 95$

$a_3 = a_2 - 5 = 95 - 5 = 90$

$a_4 = a_3 - 5 = 90 - 5 = 85$

$a_5 = a_4 - 5 = 85 - 5 = 80$  答

(2)  $a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \cdot 8 + 2 = 26$

$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \cdot 26 + 2 = 80$

$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \cdot 80 + 2 = 242$  答

## B 漸化式で定められる数列の一般項

教 p.36

練習  
37次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1=2, a_{n+1}=a_n+3$

(2)  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n$

指針 等差数列, 等比数列を表す漸化式  $a_{n+1}=a_n+d$  の形の漸化式は公差  $d$  の等差数列,  $a_{n+1}=ra_n$  の形の漸化式は公比  $r$  の等比数列を表している。

解答 (1) 数列  $\{a_n\}$  は初項 2, 公差 3 の等差数列であるから, 一般項は

$$a_n=2+(n-1)\cdot 3 \quad \text{すなわち} \quad a_n=3n-1 \quad \square$$

(2) 数列  $\{a_n\}$  は初項 1, 公比 2 の等比数列であるから, 一般項は

$$a_n=1\cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n=2^{n-1} \quad \square$$

練習  
38

教 p.36

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3^n$

(2)  $a_1=0, a_{n+1}=a_n+2n+1$

指針 階差数列の利用 漸化式は  $a_{n+1}=a_n+(n \text{ の式})$  の形をしているから, 階差数列を利用して一般項を求める。 $(n \text{ の式})$  を  $b_n$  とおくと, 数列  $\{b_n\}$  は数列  $\{a_n\}$  の階差数列であるから,  $n \geq 2$  のとき,  $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k$  である。

解答 (1) 条件より  $a_{n+1}-a_n=3^n$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の一般項が  $3^n$  であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \\ &= 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} \\ &= 1 + \frac{3^n-3}{2} \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} \leftarrow \sum_{k=1}^{n-1} 3^k \text{ は初項 } 3, \text{ 公比 } 3, \\ \text{項数 } n-1 \text{ の等比数列の} \\ \text{和である。} \end{array} \right)$$

よって  $a_n = \frac{1}{2}(3^n-1)$

初項は  $a_1=1$  であるから, この式は  $n=1$  のときにも成り立つ。

したがって, 一般項は  $a_n = \frac{1}{2}(3^n-1) \quad \square$

(2) 条件より  $a_{n+1}-a_n=2n+1$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の一般項が  $2n+1$  であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき} \quad a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1) \\ &= 0 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n + 1 \cdot (n-1) = n(n-1) + (n-1) \end{aligned}$$

よって  $a_n = (n-1)(n+1)$

$n=1$  のときに成り立つことの確認を忘れないようにしよう。



初項は  $a_1=0$  であるから、この式は  $n=1$  のときにも成り立つ。

したがって、一般項は  $a_n=(n-1)(n+1)$  答

練習  
39

教 p.37

次の□に適する数を求めよ。

(1)  $a_{n+1}=4a_n-6$  を変形すると  $a_{n+1}-\square=4(a_n-\square)$

(2)  $a_{n+1}=2a_n+1$  を変形すると  $a_{n+1}+\square=2(a_n+\square)$

(3)  $a_{n+1}=-2a_n+3$  を変形すると  $a_{n+1}-\square=-2(a_n-\square)$

指針  $a_{n+1}=pa_n+q$  の形の漸化式の変形 □にはそれぞれ同じ数が入る。

(1)  $c=4c-6$  を満たす  $c$  をみつける。

(2)  $c=2c+1$  を満たす  $c$  をみつける。

(3)  $c=-2c+3$  を満たす  $c$  をみつける。

解答 (1)  $a_{n+1}=4a_n-6$  …… ①に対して、次の等式を満たす  $c$  を考える。

$$c=4c-6 \quad \dots\dots ②$$

②を解くと  $c=2$  ①-②から  $a_{n+1}-c=4(a_n-c)$

よって  $a_{n+1}-2=4(a_n-2)$  答 2

(2)  $a_{n+1}=2a_n+1$  …… ①に対して、次の等式を満たす  $c$  を考える。

$$c=2c+1 \quad \dots\dots ②$$

②を解くと  $c=-1$  ①-②から  $a_{n+1}-c=2(a_n-c)$

よって  $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$  答 1

(3)  $a_{n+1}=-2a_n+3$  …… ①に対して、次の等式を満たす  $c$  を考える。

$$c=-2c+3 \quad \dots\dots ②$$

②を解くと  $c=1$  ①-②から  $a_{n+1}-c=-2(a_n-c)$

よって  $a_{n+1}-1=-2(a_n-1)$  答 1

練習  
40

教 p.38

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1=5, a_{n+1}=4a_n-6$  (2)  $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$

指針 漸化式  $a_{n+1}=pa_n+q$  と一般項  $a_{n+1}=pa_n+q$  の形の漸化式は、等式

$c=pc+q$  を満たす  $c$  を用いて、 $a_{n+1}-c=p(a_n-c)$  と変形できる。

よって、 $b_n=a_n-c$  とおくと、数列  $\{b_n\}$  は公比  $p$ 、初項  $a_1-c$  の等比数列になる。

解答 (1) 漸化式を変形すると  $a_{n+1}-2=4(a_n-2)$

$$b_n=a_n-2 \text{ とすると } b_{n+1}=4b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比 4 の等比数列で、初項は  $b_1=a_1-2=5-2=3$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n=3 \cdot 4^{n-1}$

したがって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n=b_n+2$  より  $a_n=3 \cdot 4^{n-1}+2$  答

(2) 漸化式を変形すると  $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$b_n=a_n-2$  とすると  $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列で、初項は  $b_1=a_1-2=3-2=1$

数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

したがって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n=b_n+2$  より  $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$  答

補足 (1)  $c=4c-6$  を解くと  $c=2$  (2)  $c=\frac{1}{2}c+1$  を解くと  $c=2$

## 研究 図形と漸化式

### まとめ

#### 図形と漸化式

図形の問題に漸化式を利用する場合がある。 $n$  番目の状態のときの数量を  $a_n$  とおき、 $a_{n+1}$  と  $a_n$  の関係を調べて漸化式を作る。

#### 練習 1

教科書 39 ページの例 1 において、 $n$  本の直線によって、交点はいくつできるか。

教 p.39

**指針 漸化式の応用**  $n$  本の直線によってできる交点の数を  $a_n$  個として、 $a_{n+1}$  と  $a_n$  の関係を調べて漸化式を作る。その際、直線が 1 本増えると交点は何個増えるかを考えるとよい。

**解答**  $n$  本の直線によってできる交点の数を  $a_n$  個とする。

1 本の直線では交点はないから  $a_1=0$

また、 $(n+1)$  本目の直線は、 $n$  本の直線と交わり、交点が  $n$  個できるから

$$a_{n+1}=a_n+n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1}-a_n=n$$

数列  $\{a_n\}$  の階差数列の第  $n$  項が  $n$  であるから、 $n \geq 2$  のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=0+\frac{1}{2}(n-1)n \quad \text{よって} \quad a_n=\frac{1}{2}n(n-1)$$

初項は  $a_1=0$  であるから、この式は  $n=1$  のときにも成り立つ。

したがって、 $n$  本の直線によって、交点は  $\frac{1}{2}n(n-1)$  個 できる。 答

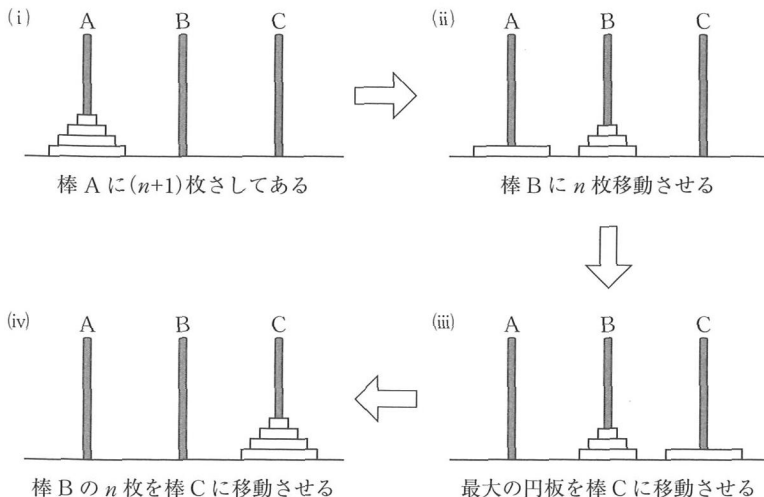
## コラム 漸化式

教 p.40

## 練習

教科書の40ページの会話を参考に，数列  $\{a_n\}$  が満たす漸化式を作り， $\{a_n\}$  の一般項を求めてみよう。

**指針** **ハノイの塔と漸化式** まず，教科書の会話の内容を整理し，「 $(n+1)$  枚の円板を他の棒に移動させる」手順を具体的にシミュレーションしてみるとよい。3本の棒を A, B, C とし，棒 A にさしてある  $(n+1)$  枚の円板を棒 C に移動させるものとする。この手順は次のようになる。



教科書の会話から，(i)から(ii)の状態に至る手数が  $a_n$  であることがわかる。このことを参考にしようえて，残りの(ii)から(iv)の状態に至る手数がどのようになるかを考えてみる。

**解答** 3本の棒を A, B, C とし，棒 A にさしてある  $(n+1)$  枚の円板を棒 C に移動させるものとする。また， $n$  枚の円板を別の棒に移動させる手数が  $a_n$  回である。まず，棒 A にさしてある円板のうちの  $n$  枚を棒 B に移動させる手数は  $a_n$  回である。次に，棒 A にさしてある最大の円板を棒 C に移動させる手数は1回である。さらに，棒 B にさしてある  $n$  枚の円盤を棒 C に移動させる手数は  $a_n$  回である。

以上により， $(n+1)$  枚の円板を別の棒に移動させる手数が  $a_{n+1}$  回であるから

$$a_{n+1} = a_n + 1 + a_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} = 2a_n + 1 \quad \text{答}$$

これが数列  $\{a_n\}$  が満たす漸化式である。

漸化式を変形すると  $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$b_n=a_n+1$  とすると  $b_{n+1}=2b_n$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比 2 の等比数列である。また、1 枚の円板を別の棒に移動させる手数は 1 回であるから、 $a_1=1$  より  $b_1=a_1+1=1+1=2$

ゆえに、数列  $\{b_n\}$  の一般項は  $b_n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n$

したがって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n=b_n-1$  より

$$a_n=2^n-1 \quad \square$$

## 発展 隣接 3 項間の漸化式

まとめ

### 隣接 3 項間の漸化式

漸化式  $a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0$  は、2 次方程式  $x^2+px+q=0$  の解  $\alpha, \beta$  を利用して、次のように変形することができる。

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

**参考**  $a_{n+2}=(p+1)a_{n+1}-pa_n$  の形の漸化式は、次の形に変形することができる。

$$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$$

練習  
1

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1=0, a_2=1, a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$

(2)  $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0$

教 p.42

### 指針 隣接 3 項間の漸化式

(1) 2 次方程式  $x^2-7x+10=0$  の解は  $x=2, 5$

(2) 2 次方程式  $x^2-3x+2=0$  の解は  $x=1, 2$

解を  $\alpha, \beta$  として、上のまとめのように、漸化式を 2 通りに変形する。

**解答** (1) 漸化式  $a_{n+2}-7a_{n+1}+10a_n=0$  を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=5(a_{n+1}-2a_n) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2}-5a_{n+1}=2(a_{n+1}-5a_n) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、数列  $\{a_{n+1}-2a_n\}$  は公比 5、初項  $a_2-2a_1=1$  の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=5^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②より、数列  $\{a_{n+1}-5a_n\}$  は公比 2、初項  $a_2-5a_1=1$  の等比数列であるから

$$a_{n+1}-5a_n=2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③-④から  $3a_n=5^{n-1}-2^{n-1}$

すなわち 
$$a_n = \frac{5^{n-1} - 2^{n-1}}{3} \quad \text{答}$$

(2) 漸化式  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$  を変形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  は公比 2、初項  $a_2 - a_1 = 2$  の等比数列であるから

$$a_{n+1} - a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

②より  $a_{n+1} - 2a_n = a_n - 2a_{n-1} = \cdots = a_2 - 2a_1 = 1$

すなわち  $a_{n+1} - 2a_n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

③-④から  $a_n = 2^n - 1 \quad \text{答}$

**別解** (2) 漸化式  $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$  を変形すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$b_n = a_{n+1} - a_n$  とすると

$$b_{n+1} = 2b_n, \quad b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は、初項 2、公比 2 の等比数列であるから、一般項は

$$b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

数列  $\{b_n\}$  は数列  $\{a_n\}$  の階差数列であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \end{aligned}$$

よって  $a_n = 2^n - 1$

初項は  $a_1 = 1$  であるから、この式は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

したがって、一般項  $a_n$  は  $a_n = 2^n - 1 \quad \text{答}$

## 練習 2

教 p.42

次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある。

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$$

(1)  $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$  であることを示せ。

(2)  $\frac{a_n}{2^n} = b_n$  とする。 $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$  の両辺を  $2^{n+1}$  で割ることによ

て、数列  $\{b_n\}$  の漸化式を導き、 $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。

(3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

## 指針 隣接 3 項間の漸化式

(1) 漸化式から  $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$

よって  $a_{n+2} - 2a_{n+1} = (4a_{n+1} - 4a_n) - 2a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n)$

(3)  $a_n = b_n \cdot 2^n$  から求める。

解答 (1) 漸化式  $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$  を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$$

よって、数列  $\{a_{n+1}-2a_n\}$  は公比 2, 初項  $a_2-2a_1=2$  の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n \quad \text{図}$$

(2)  $a_{n+1}-2a_n=2^n$  の両辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = b_n \text{ とすると } b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2}$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公差  $\frac{1}{2}$ , 初項  $\frac{a_1}{2}=0$  の等差数列であるから

$$b_n = 0 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad b_n = \frac{1}{2}(n-1) \quad \text{答}$$

(3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n = b_n \cdot 2^n$  より

$$a_n = \frac{1}{2}(n-1) \cdot 2^n \quad \text{すなわち} \quad a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} \quad \text{答}$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = b_{n+1}$$

だよ。



## 10 数学的帰納法

まとめ

## 1 数学的帰納法の原理

自然数  $n$  を含む等式 (A) について、次の [1], [2] を示せたとする。

[1]  $n=1$  のとき (A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つと仮定すると、

$n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

このとき、[1] から、まず  $n=1$  のとき (A) が成り立つ。

すると、[2] から、 $n=1+1$  すなわち  $n=2$  のときも (A) が成り立つ。

さらに、[2] から、 $n=2+1$  すなわち  $n=3$  のときも (A) が成り立つ。

同様に  $n=4, 5, 6, \dots$  のときも (A) が成り立つ。したがって、[1], [2] を示せば、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つと結論してよい。

このような証明法を 数学的帰納法 という。

## 2 数学的帰納法

一般に、自然数  $n$  を含む条件 (A) があるとき、

「すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ」

を証明するには、次の [1], [2] を示せばよい。

[1]  $n=1$  のとき (A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つと仮定すると、

$n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

## A 数学的帰納法の原理 B 等式の証明

教 p.44

練習  
41

数学的帰納法を用いて、次の等式を証明せよ。

$$(1) 1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$(2) 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\dots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

**指針** 数学的帰納法による等式の証明 まず、 $n=1$  のとき等式が成り立つことを示す。次に、 $n=k$  のとき等式が成り立つと仮定し、 $n=k+1$  のときも成り立つことを示す。

**解答** (1) この等式を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき

左辺=1

右辺= $1^2=1$

よって、 $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

が成り立つと仮定すると,  $n=k+1$  のときの (A) の左辺は

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\}$$

$$=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

$n=k+1$  のときの (A) の右辺は  $(k+1)^2$

よって,  $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 終

(2) この等式を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき

$$\text{左辺}=1\cdot 2=2$$

$$\text{右辺}=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot (1+1)(1+2)=2$$

よって,  $n=1$  のとき, (A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ, すなわち

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

が成り立つと仮定すると,  $n=k+1$  のときの (A) の左辺は

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$n=k+1$  のときの (A) の右辺は

$$\frac{1}{3}(k+1)\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

よって,  $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 終

## C 不等式の証明

教 p.45

練習  
42

$n$  を 3 以上の自然数とすると, 次の不等式を証明せよ。

$$2^n > 2n+1$$

指針 数学的帰納法による不等式の証明  $n \geq 3$  であるから, まず,  $n=3$  のときに不等式が成り立つことを示す。

次に,  $k \geq 3$  として,  $n=k$  のときの不等式  $2^k > 2k+1$  が成り立つと仮定すると, 不等式  $2^{k+1} > 2(k+1)+1$  が成り立つことを示す。

解答 この不等式を (A) とする。

[1]  $n=3$  のとき

$$\text{左辺} = 2^3 = 8$$

$$\text{右辺} = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

よって、 $n=3$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $k \geq 3$  として、 $n=k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち

$$2^k > 2k+1 \text{ が成り立つと仮定する。}$$

$n=k+1$  のときの (A) の両辺の差を考えると

$$2^{k+1} - \{2(k+1) + 1\} = 2 \cdot 2^k - (2k+3)$$

$$> 2(2k+1) - (2k+3)$$

$$\leftarrow 2^k > 2k+1 \text{ より}$$

$$= 2k-1 > 0$$

$$\leftarrow k \geq 3 \text{ より}$$

$$\text{すなわち } 2^{k+1} > 2(k+1) + 1$$

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、3 以上のすべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 終

## D 自然数に関する命題の証明

教 p.46

練習  
43

$n$  は自然数とする。 $5^n - 1$  は 4 の倍数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

### 指針 自然数に関する命題の証明

$n=k$  のとき、 $5^k - 1$  は 4 の倍数であると仮定したとき、

「 $5^k - 1$  は 4 の倍数である」 $\iff$  「整数  $m$  を用いて、 $5^k - 1 = 4m$  と表される」  
のように式を用いた表現に言い換えた上で、この式を  $n=k+1$  の式変形で利用する。

解答 「 $5^n - 1$  は 4 の倍数である」を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき

$$5^1 - 1 = 5^1 - 1 = 4$$

よって、 $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち  $5^k - 1$  は 4 の倍数であると仮定すると、ある整数  $m$  を用いて

$$5^k - 1 = 4m \quad \text{すなわち} \quad 5^k = 4m + 1$$

と表される。

$n=k+1$  のときを考えると

$$5^{k+1} - 1 = 5 \cdot 5^k - 1 = 5(4m + 1) - 1$$

$$= 4 \cdot 5m + 4 = 4(5m + 1)$$

$5m+1$  は整数であるから、 $5^{k+1} - 1$  は 4 の倍数である。

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 終

## 研究 自然数に関する命題のいろいろな証明

まとめ

## 余りで場合分けする証明法

自然数に関する命題は、自然数ある数で割ったときの余りによって場合分けする方法を用いても証明できることがある。

練習  
1

教 p.47

- (1)  $n$  は自然数とする。 $4n^3 - n$  は 3 の倍数であることを、数学的帰納法を用いて証明せよ。
- (2)  $n$  は自然数とする。 $4n^3 - n$  は 3 の倍数であることを、自然数を 3 で割ったときの余りで場合分けする方法を利用して証明せよ。

## 指針 自然数に関する命題のいろいろな証明

- (1) 教科書 p.46 の応用例題 7 と同じようにして証明すればよい。
- (2)  $k$  を整数とし、教科書 p.47 と同様に、

[1]  $n=3k$  のとき

[2]  $n=3k+1$  のとき

[3]  $n=3k+2$  のとき

の 3 つの場合に分けて証明する。

解答 (1) 「 $4n^3 - n$  は 3 の倍数である」を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき  $4n^3 - n = 4 \cdot 1^3 - 1 = 3$

よって、 $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。

- [2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち  $4k^3 - k$  は 3 の倍数であると仮定すると、 $4k^3 - k$  はある整数  $m$  を用いて、 $4k^3 - k = 3m$  と表される。

$n=k+1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} 4(k+1)^3 - (k+1) &= 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k - 1 \\ &= (4k^3 - k) + 3(4k^2 + 4k + 1) \\ &= 3m + 3(4k^2 + 4k + 1) \\ &= 3(m + 4k^2 + 4k + 1) \end{aligned}$$

$m + 4k^2 + 4k + 1$  は整数であるから、

$4(k+1)^3 - (k+1)$  は 3 の倍数である。

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 終

- (2) 自然数を 3 で割ったときの余りは 0, 1, 2 のいずれかである。よって、すべての自然数は、整数  $k$  を用いて、 $3k, 3k+1, 3k+2$  のいずれかの形に表される。

[1]  $n=3k$  のとき

$$4n^3 - n = 4 \cdot (3k)^3 - 3k = 3(36k^3 - k)$$

[2]  $n=3k+1$  のとき

$$\begin{aligned} 4n^3 - n &= 4 \cdot (3k+1)^3 - (3k+1) \\ &= 3(36k^3 + 36k^2 + 11k + 1) \end{aligned}$$

[3]  $n=3k+2$  のとき

$$\begin{aligned} 4n^3 - n &= 4 \cdot (3k+2)^3 - (3k+2) \\ &= 3(36k^3 + 72k^2 + 47k + 10) \end{aligned}$$

よって、いずれの場合も、 $4n^3 - n$  は 3 の倍数である。 図

## 第1章 第3節

## 問題

教 p.48

16 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1=2, a_{n+1}=a_n+2^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(2)  $a_1=1, a_{n+1}+a_n=3 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(3)  $a_1=2, 2a_{n+1}=a_n+1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

## 指針 漸化式と一般項

(1) 与えられた漸化式が  $a_{n+1}=a_n+(n \text{ の式})$  の形をしているとき、その数列の一般項は階差数列を利用して求めることができる。(2), (3) 与えられた漸化式が  $a_{n+1}=pa_n+q$  の形になるとき、 $c=pc+q$  を満たす  $c$  を用いると、 $a_{n+1}-c=p(a_n-c)$  と変形できる。このとき、数列  $\{a_n-c\}$  は、公比  $p$ 、初項  $a_1-c$  の等比数列である。解答 (1) 条件より  $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$ 数列  $\{a_n\}$  の階差数列の一般項が  $2^{n-1}$  であるから  
 $n \geq 2$  のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2 + \frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$

すなわち  $a_n = 2^{n-1} + 1$

初項は  $a_1=2$  であるから、この式は  $n=1$  のときにも成り立つ。したがって、一般項は  $a_n = 2^{n-1} + 1$  図

(2) 漸化式を変形すると  $a_{n+1} - \frac{3}{2} = -\left(a_n - \frac{3}{2}\right)$

$$b_n = a_n - \frac{3}{2} \text{ とすると } b_{n+1} = -b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比  $-1$  の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = -\frac{1}{2}(-1)^{n-1} = \frac{(-1)^n}{2}$$

$$\text{したがって、数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は、} a_n = b_n + \frac{3}{2} \text{ より } a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2} \quad \text{答}$$

$$(3) \text{ 漸化式より } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$$

$$\text{これを变形すると } a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)$$

$$b_n = a_n - 1 \text{ とすると } b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

よって、数列  $\{b_n\}$  は公比  $\frac{1}{2}$  の等比数列で、初項は

$$b_1 = a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\text{したがって、数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は、} a_n = b_n + 1 \text{ より } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 \quad \text{答}$$

教 p.48

17 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を、それぞれ求めよ。

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1, b_{n+1} = b_n + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

**指針** 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の漸化式 2 つの漸化式があるが、まず、1 つ目の漸化式  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  から一般項  $a_n$  を求める。また、もう 1 つの漸化式  $b_{n+1} = b_n + a_n$  から、数列  $\{a_n\}$  が数列  $\{b_n\}$  の階差数列であることがわかる。

**解答**  $a_{n+1} = 2a_n + 1$  を変形すると  $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

よって、数列  $\{a_n + 1\}$  は公比 2、初項  $a_1 + 1 = 1$  の等比数列であるから

$$a_n + 1 = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{したがって、数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は } a_n = 2^{n-1} - 1 \quad \text{答}$$

$$\text{これを } b_{n+1} = b_n + a_n \text{ に代入すると } b_{n+1} - b_n = 2^{n-1} - 1$$

数列  $\{b_n\}$  の階差数列の一般項が  $2^{n-1} - 1$  であるから

$$\begin{aligned} n \geq 2 \text{ のとき } b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^{k-1} - 1) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n - 1) \end{aligned}$$

$$\text{よって } b_n = 2^{n-1} - n + 1$$

初項は  $b_1 = 1$  であるから、この式は  $n = 1$  のときにも成り立つ。

$$\text{したがって、数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 2^{n-1} - n + 1 \quad \text{答}$$

18 次の等式, 不等式を数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$(1) \quad 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

$$(2) \quad 2^n > n^2 - n + 2 \quad \text{ただし, } n \text{ は } 4 \text{ 以上の自然数}$$

**指針** 数学的帰納法による等式, 不等式の証明

(1) [1]  $n=1$  のとき, 等式が成り立つことを示す。

[2]  $n=k$  のとき, 等式が成り立つことを仮定し, それを利用して,  
 $n=k+1$  のときの等式

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = \{(k+1)+1\}! - 1$$

が成り立つことを示す。

(2)  $n$  は 4 以上の自然数であるから, まず,  $n=4$  のとき成り立つことを示す。

次に,  $n=k+1$  のときの不等式は,  $2^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$  であるから,

$n=k$  のとき成り立つと仮定した不等式を用いて,

$$2^{k+1} - \{(k+1)^2 - (k+1) + 2\} > 0 \text{ を示す。}$$

**解答** (1) この等式を (A) とする。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき} \quad \text{左辺} = 1 \cdot 1! = 1, \quad \text{右辺} = 2! - 1 = 1$$

よって,  $n=1$  のとき, (A) が成り立つ。

$$[2] \quad n=k \text{ のとき (A) が成り立つ, すなわち}$$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$$

が成り立つと仮定すると,  $n=k+1$  のときの (A) の左辺は

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)!$$

$$= (k+1)! - 1 + (k+1) \cdot (k+1)! = \{1 + (k+1)\}(k+1)! - 1$$

$$= (k+2)(k+1)! - 1 = (k+2)! - 1$$

$$n=k+1 \text{ のときの (A) の右辺は} \quad \{(k+1)+1\}! - 1 = (k+2)! - 1$$

よって,  $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から, すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 **終**

(2) この不等式を (A) とする。

$$[1] \quad n=4 \text{ のとき} \quad \text{左辺} = 2^4 = 16, \quad \text{右辺} = 4^2 - 4 + 2 = 14$$

よって,  $n=4$  のとき, (A) が成り立つ。

[2]  $k \geq 4$  として,  $n=k$  のとき (A) が成り立つ, すなわち  $2^k > k^2 - k + 2$  が  
成り立つと仮定する。

$n=k+1$  のときの (A) の両辺の差を考えると

$$2^{k+1} - \{(k+1)^2 - (k+1) + 2\} = 2 \cdot 2^k - (k^2 + k + 2)$$

$$> 2(k^2 - k + 2) - (k^2 + k + 2)$$

$$= k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) > 0$$

$$\text{すなわち} \quad 2^{k+1} > (k+1)^2 - (k+1) + 2$$

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、4 以上のすべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 総

教 p.48

19 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある。

$$a_1=2, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $a_2, a_3, a_4$  を求めよ。

(2) 第  $n$  項  $a_n$  を推測して、それを数学的帰納法を用いて証明せよ。

### 指針 漸化式と数学的帰納法

(2) (1)で求めた  $a_2, a_3, a_4$  から  $a_n$  を推測し、それが正しいことを証明する。

また、 $n=k+1$  について成り立つことを示す際には漸化式を利用する。

解答 (1)  $a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$  答  $a_3=2-\frac{1}{a_2}=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$  答

$$a_4=2-\frac{1}{a_3}=2-\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$
 答

(2) (1)の結果から、 $a_n=\frac{n+1}{n}$  と推測できる。

この等式を(A)とする。

$$[1] \quad n=1 \text{ のとき, } a_1=\frac{1+1}{1}=2$$

よって、 $n=1$  のとき、(A)が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき(A)が成り立つ、すなわち  $a_k=\frac{k+1}{k}$  が成り立つと仮定する

と、漸化式より

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{2(k+1)-k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}$$

$$\text{すなわち} \quad a_{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

よって、 $n=k+1$  のときも(A)が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について(A)が成り立つ。 総

20 24 時間に 1 回服用する薬がある。この薬を 1 回服用すると、服用直後の体内の薬の有効成分は 100mg 増加する。また、体内に入った薬の有効成分の量は 24 時間ごとに 20% になる。1 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量が 100mg であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量を求めよ。
- (2)  $n$  回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量を  $a_n$ mg とするとき、 $a_{n+1}$  を  $a_n$  で表せ。
- (3)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。

### 指針 漸化式の応用問題

(1), (2) 問題文から、服用直前には、薬の有効成分は前回の服用直後の

$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5} \text{ になっていることがわかる。したがって、次が成り立つ。}$$

{(n+1) 回目の服用直後の有効成分の量}

$$= \left\{ (n \text{ 回目の服用直後の有効成分の量}) \times \frac{1}{5} + 100 \right\} (\text{mg})$$

**解答** 服用直前には、体内の薬の有効成分は、前回の服用直後の  $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$  であり、

新たな薬の服用によって、服用直後の有効成分は 100mg 増加する。

(1) 2 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量は

$$100 \times \frac{1}{5} + 100 = 120 (\text{mg})$$

よって、3 回目に薬を服用した直後の体内の有効成分の量は

$$120 \times \frac{1}{5} + 100 = 124 (\text{mg}) \quad \text{答}$$

$$(2) \quad a_{n+1} = a_n \times \frac{1}{5} + 100$$

$$\text{すなわち} \quad a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n + 100 \quad \text{答}$$

$$(3) \quad (2) \text{ の漸化式から } a_{n+1} - 125 = \frac{1}{5} (a_n - 125)$$

数列  $\{a_n - 125\}$  は公比  $\frac{1}{5}$ 、初項  $a_1 - 125 = 100 - 125 = -25$

の等比数列であるから

$$a_n - 125 = (-25) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{したがって} \quad a_n = 125 - 25 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{答}$$

## 第1章 章末問題A

1  
章  
数  
列

教 p.49

1. 第4項が14, 第8項が30である等差数列がある。次の数は, この数列の項であるかどうかを調べよ。また, 項であるときは第何項かを求めよ。

(1) 70

(2) 123

**指針 等差数列の項の存在の判定** 初項  $a$ , 公差  $d$  の等差数列の第  $n$  項を  $a_n = a + (n-1)d$  とし,  $a_4 = 14$ ,  $a_8 = 30$  から  $a$ ,  $d$  についての連立方程式を立てて  $a$ ,  $d$  を求め, 一般項  $a_n$  を表す。次に,  $a_n = 70$  や  $a_n = 123$  となる自然数  $n$  が存在するかどうかを調べる。

**解答** 初項を  $a$ , 公差を  $d$  とすると

$$a_n = a + (n-1)d$$

第4項が14であるから  $a + 3d = 14$  …… ①

第8項が30であるから  $a + 7d = 30$  …… ②

①, ②を解くと  $a = 2, d = 4$

よって, 一般項は  $a_n = 2 + (n-1) \cdot 4$  すなわち  $a_n = 4n - 2$

(1) 第  $n$  項が70であるとして  $70 = 4n - 2$

これを解くと  $n = 18$

よって, 70はこの数列の項であり, 第18項である。 答

(2) 第  $n$  項が123であるとして  $123 = 4n - 2$

これを満たす自然数  $n$  は存在しないから, 123はこの数列の項ではない。

答

教 p.49

2. 初項が60, 末項が-30である等差数列の和が240であるとき, この数列の公差と項数を求めよ。

**指針 等差数列の一般項と和** 公差を  $d$ , 項数を  $n$  として, 「第  $n$  項が-30であること」, 「和が240であること」についてそれぞれ式を立てる。

**解答** 公差を  $d$ , 項数を  $n$  とする。

第  $n$  項が-30であるから  $60 + (n-1)d = -30$  …… ①

和が240であるから  $\frac{1}{2}n\{60 + (-30)\} = 240$  …… ②

②より  $15n = 240$   $n = 16$

これを①に代入して  $60 + 15d = -30$   $d = -6$

よって 公差 -6, 項数 16 答

3. 1日目に1円, 2日目に2円, 3日目に4円, 4日目に8円, ……と  
うように, 2日目以降は前日の2倍の金額を毎日貯金するとき, 15日  
間での貯金の総額を求めよ。

**指針** 等比数列の和 貯金する金額(円)は1, 2, 4, 8, ……となり, 初項1, 公比2の等比数列であるから, この等比数列の第15項までの和を求める。

**解答** 貯金する金額(円)は 1, 2, 4, 8, ……,  $2^{14}$   
これは初項1, 公比2, 項数15の等比数列であるから, 15日間の貯金の総額  
は初項から第15項までの等比数列の和で求められる。

$$\frac{1(2^{15}-1)}{2-1}=2^{15}-1=32768-1=32767$$

よって, 15日間の貯金の総額は 32767円 答

4. 初項が正の数である等比数列  $\{a_n\}$  の, 第2項と第4項の和が20で, 第  
4項と第6項の和が80であるとき, 次のものを求めよ。

- (1) 初項と公比 (2) 初項から第10項までの和

**指針** 等比数列の一般項と和

(1) 初項を  $a$ , 公比を  $r$  とし,  $a_2+a_4=20$ ,  $a_4+a_6=80$  から,  $a$  と  $r$  につい  
ての連立方程式を立てる。

(2) 初項  $a$ , 公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$r \neq 1 \text{ のとき } S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

**解答** (1) 初項を  $a$ , 公比を  $r$  とすると

第2項と第4項の和が20であるから

$$ar+ar^3=20 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

第4項と第6項の和が80であるから

$$ar^3+ar^5=80 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②の左辺を変形すると  $r^2(ar+ar^3)=80$

①を代入して  $20r^2=80$

よって  $r^2=4$  ゆえに  $r=\pm 2$

$r=2$  のとき, ①より  $10a=20$   $a=2$

$r=-2$  のとき, ①より  $-10a=20$   $a=-2$

$a>0$  であるから 初項2, 公比2 答

(2) (1)より, 初項2, 公比2であるから, 初項から第10項までの和は

$$\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}=2 \times 1023=2046 \quad \text{答}$$

5. 次の数列の第  $k$  項を  $k$  の式で表せ。また、この数列の和を求めよ。

$$1, 1+3, 1+3+5, \dots, 1+3+5+\dots+(2n-1)$$

**指針** 和の形の数列の一般項と和 この数列の第  $k$  項は、 $k$  個の正の奇数の和になっている。

**解答** この数列の第  $k$  項は  $1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$  答

また、この数列の項数は  $n$  であるから、求める和は

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \quad \text{答}$$

6. 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  がある。

$$a_1=1, na_{n+1}=2(n+1)a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $b_n = \frac{a_n}{n}$  とするとき、数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。

(2) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

**指針** 漸化式とおき換え

(1) 漸化式の両辺を  $n(n+1)$  で割る。

(2)  $a_n = nb_n$  から、 $a_n$  を求める。

**解答** (1) 漸化式の両辺を  $n(n+1)$  で割ると  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n}{n}$

$$b_n = \frac{a_n}{n} \text{ のとき, } b_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{n+1} \text{ であるから } b_{n+1} = 2b_n$$

$$\text{数列 } \{b_n\} \text{ は公比 } 2 \text{ の等比数列で、初項は } b_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{よって、数列 } \{b_n\} \text{ の一般項は } b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\text{すなわち } b_n = 2^{n-1} \quad \text{答}$$

$$(2) b_n = \frac{a_n}{n} \text{ から } a_n = nb_n$$

$$\text{よって、数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は } a_n = n \cdot 2^{n-1} \quad \text{答}$$

7. すべての自然数  $n$  について、 $7^n - 1$  は 6 の倍数である。このことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。

**指針** 自然数に関する命題の証明 まず、 $n=1$  のときを示す。次に、 $n=k$  のときの命題の成立を仮定して、 $7^k - 1 = 6m$  ( $m$  は整数) とおき、 $7^{k+1} - 1$  が  $6 \times (\text{整数})$  と表されることを示す。

解答 「 $7^n-1$  は 6 の倍数である」を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき

$$7^n-1=7^1-1=6$$

よって、 $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち  $7^k-1$  は 6 の倍数であると仮定すると、ある整数  $m$  を用いて

$$7^k-1=6m$$

すなわち  $7^k=6m+1$  と表される。

$n=k+1$  のときを考えると

$$\begin{aligned} 7^{k+1}-1 &= 7 \cdot 7^k - 1 = 7(6m+1) - 1 \\ &= 42m + 6 = 6(7m+1) \end{aligned}$$

$7m+1$  は整数であるから、 $7^{k+1}-1$  は 6 の倍数である。

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 図

## 第 1 章 章末問題 B

教 p.50

8. 分数の列を、次のような群に分ける。ただし、第  $n$  群には  $n$  個の分数が入り、その分母は  $n$ 、分子は 1 から  $n$  までの自然数であるとする。

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & | & \frac{1}{2}, \frac{2}{2} & | & \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} & | & \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4} & | & \frac{1}{5}, \dots \end{array}$$

第 1 群    第 2 群                  第 3 群                                  第 4 群

- (1)  $\frac{3}{10}$  は第何項か。                                  (2) 第 100 項を求めよ。

指針 群に分けられた数列 分母が同じ項が 1 つの群になっている。

- (1)  $\frac{3}{10}$  は第 10 群の 3 番目である。まず、第 9 群までの項数を求める。  
 (2) 第 100 項が第  $n$  群に入るとすると  
 $\{\text{第 } (n-1) \text{ 群までの項数}\} < 100 \leq \{\text{第 } n \text{ 群までの項数}\}$   
 が成り立つ。これを満たす  $n$  を求める。

解答 (1)  $\frac{3}{10}$  は第 10 群の 3 番目の数である。

$$\text{第 1 群から第 9 群までの項数は} \quad \sum_{k=1}^9 k = \frac{1}{2} \cdot 9(9+1) = 45$$

よって、 $45+3=48$  から、 $\frac{3}{10}$  はこの数列の 第 48 項 である。 図

(2) 第 100 項が第  $n$  群に入る数であるとする

{第  $(n-1)$  群までの項数}  $< 100 \leq$  {第  $n$  群までの項数} より

$$\sum_{k=1}^{n-1} k < 100 \leq \sum_{k=1}^n k \quad \text{したがって} \quad \frac{1}{2}(n-1)n < 100 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

すなわち  $(n-1)n < 200 \leq n(n+1)$

$13 \times 14 = 182$ ,  $14 \times 15 = 210$  より, これを満たす自然数  $n$  は  $n = 14$

よって, 第 100 項は第 14 群に入る数であり

$$100 - \sum_{k=1}^{13} k = 100 - \frac{1}{2} \cdot 13(13+1) = 100 - 91 = 9$$

であるから, 第 100 項は  $\frac{9}{14}$  答

教 p.50

9. 項数  $n$  の数列  $1 \cdot n, 2(n-1), 3(n-2), \dots, n \cdot 1$  がある。

(1) この数列の第  $k$  項を  $n$  と  $k$  を用いた式で表せ。

(2) この数列の和を求めよ。

### 指針 $\Sigma$ の計算の利用

(1) 各項の左側の数だけに着目すると  $1, 2, 3, \dots, n$

同様に, 右側の数だけに着目すると  $n, n-1, n-2, \dots, 1$

それぞれの第  $k$  項の積が, 求める第  $k$  項である。

(2) 一般項には 2 つの文字  $n$  と  $k$  が含まれるが,  $n$  は  $k$  に無関係な定数であることに注意して計算する。

解答 (1) 各項を 2 つの数列に分けて考えると

$$1, 2, 3, \dots, n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n, n-1, n-2, \dots, 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①の第  $k$  項は  $k$ , ②の第  $k$  項は  $n - (k-1) = n - k + 1$

よって, この数列の第  $k$  項は  $k(n - k + 1)$  答

(2) この数列の和は, (1)より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(n-k+1) &= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\} = -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)\sum_{k=1}^n k \\ &= -\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{- (2n+1) + 3(n+1)\} \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \quad \text{答} \end{aligned}$$

10. 数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が,  $S_n = 2a_n - 1$  であるとする。

- (1)  $a_{n+1} = 2a_n$  であることを示せ。 (2) 第  $n$  項  $a_n$  を求めよ。

**指針** 数列の和と一般項

- (1)  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  であることを利用して変形するとよい。  
 (2) (1)より, 数列  $\{a_n\}$  は等比数列であることがわかる。

**解答** (1)  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$  であるから

$$a_{n+1} = (2a_{n+1} - 1) - (2a_n - 1) = 2a_{n+1} - 2a_n$$

よって  $a_{n+1} = 2a_n$  終

- (2) (1)より, 数列  $\{a_n\}$  は公比 2 の等比数列であり, 初項  $a_1$  は

$$a_1 = S_1 = 2a_1 - 1$$

より  $a_1 = 1$

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 2^{n-1} \quad \text{答}$$

11. 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

(1)  $a_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2(n+1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

(2)  $a_1 = 1, \quad a_{n+1} - 3a_n = 2^{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

**指針** 漸化式と一般項

- (1)  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とすると,  $b_{n+1} - b_n = 2(n+1)$  となり, 数列  $\{b_n\}$  の階差数列の一般項が  $2(n+1)$  であることがわかる。

- (2) 漸化式の両辺を  $2^{n+1}$  で割り,  $\frac{a_n}{2^n} = b_n$  において, 数列  $\{b_n\}$  の漸化式を導く。

**解答** (1)  $b_n = \frac{1}{a_n}$  とすると, 与えられた漸化式は  $b_{n+1} - b_n = 2(n+1)$

また  $b_1 = \frac{1}{a_1} = 2$  数列  $\{b_n\}$  の階差数列の一般項が  $2(n+1)$  であるから,  
 $n \geq 2$  のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + 2(n-1) = n^2 + n$$

よって  $b_n = n(n+1)$

初項は  $b_1 = 2$  であるから, この式は  $n=1$  のときにも成り立つ。

したがって, 数列  $\{a_n\}$  の一般項は,  $a_n = \frac{1}{b_n}$  より  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$  答

(2) 漸化式の両辺を  $2^{n+1}$  で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3a_n}{2^{n+1}} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} = 1$$

$\frac{a_n}{2^n} = b_n$  とすると、与えられた漸化式は

$$b_{n+1} - \frac{3}{2}b_n = 1 \quad \text{また} \quad b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

漸化式を変形すると  $b_{n+1} + 2 = \frac{3}{2}(b_n + 2)$

よって、数列  $\{b_n + 2\}$  は公比  $\frac{3}{2}$ 、初項  $b_1 + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$  の等比数列である

$$\text{から} \quad b_n + 2 = \frac{5}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = \frac{5}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} - 2$$

したがって、数列  $\{a_n\}$  の一般項は、 $a_n = b_n \cdot 2^n$  より

$$a_n = \left\{ \frac{5}{2} \left( \frac{3}{2} \right)^{n-1} - 2 \right\} \cdot 2^n = 5 \cdot 3^{n-1} - 2^{n+1} \quad \text{答}$$

教 p.50

12.  $a > 0$  で  $n$  を自然数とする。数学的帰納法を用いて、不等式

$(1+a)^n \geq 1+na$  を証明せよ。

**指針** 数学的帰納法による不等式の証明

$n=k$  で成り立つと仮定し、 $n=k+1$  のときの不等式  $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$  が成り立つことを示す。

**解答** 不等式  $(1+a)^n \geq 1+na$  を (A) とする。

[1]  $n=1$  のとき

$$\text{左辺} = 1+a$$

$$\text{右辺} = 1+1 \cdot a = 1+a$$

よって、 $n=1$  のとき、(A) が成り立つ。

[2]  $n=k$  のとき (A) が成り立つ、すなわち

$(1+a)^k \geq 1+ka$  が成り立つと仮定する。

$n=k+1$  のときの (A) の両辺の差を考えると

$$\begin{aligned} (1+a)^{k+1} - \{1+(k+1)a\} &= (1+a)(1+a)^k - \{1+(k+1)a\} \\ &\geq (1+a)(1+ka) - \{1+(k+1)a\} \\ &= 1+ka^2+a+ka-1-ka-a=ka^2 > 0 \end{aligned}$$

すなわち  $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$

よって、 $n=k+1$  のときも (A) が成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数  $n$  について (A) が成り立つ。 **終**

13. 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  がある。

$$a_1=0, b_1=1, a_{n+1}=a_n+2b_n, b_{n+1}=2a_n+b_n$$

- (1) 数列  $\{a_n+b_n\}$ ,  $\{a_n-b_n\}$  の一般項を, それぞれ求めよ。  
 (2) 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を, それぞれ求めよ。

**指針** 数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の漸化式

- (1) 設問のように, 数列  $\{a_n+b_n\}$  を考えると, 2 つの漸化式から

$$a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

よって, 数列  $\{a_n+b_n\}$  は公比 3 の等比数列であることがわかる。

数列  $\{a_n-b_n\}$  も同様に考える。

- (2) (1)の結果より,  $a_n$ ,  $b_n$  の連立方程式を解く要領で,  $a_n$ ,  $b_n$  を求める。

**解答** (1)  $a_{n+1}=a_n+2b_n$  …… ①

$$b_{n+1}=2a_n+b_n$$
 …… ② とする。

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{ から } a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$$

よって, 数列  $\{a_n+b_n\}$  は公比 3, 初項  $a_1+b_1=1$  の等比数列であるから

$$a_n+b_n=1 \cdot 3^{n-1}$$

$$\text{すなわち } a_n+b_n=3^{n-1} \quad \text{答}$$

$$\text{また, } \textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ から } a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$$

よって, 数列  $\{a_n-b_n\}$  は公比  $-1$ , 初項  $a_1-b_1=-1$  の等比数列であるから

$$a_n-b_n=-1 \cdot (-1)^{n-1}$$

$$\text{すなわち } a_n-b_n=(-1)^n \quad \text{答}$$

$$(2) (1) \text{ から } a_n+b_n=3^{n-1} \quad \text{…… } \textcircled{3}$$

$$a_n-b_n=(-1)^n \quad \text{…… } \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}+\textcircled{4} \text{ から } 2a_n=3^{n-1}+(-1)^n$$

$$\text{よって } a_n=\frac{3^{n-1}+(-1)^n}{2} \quad \text{答}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ から } 2b_n=3^{n-1}-(-1)^n$$

$$\text{よって } b_n=\frac{3^{n-1}-(-1)^n}{2} \quad \text{答}$$